

Vejleder: Peter Løchte Jørgensen
Handelshøjskolen i Århus

Den langsigtede investors optimale porteføljevalg med fast ejendom og gæld inkluderet

En kandidatafhandling af
Siri Dillan Børresen, cand.merc.finansiering
Stud.ID: SB76089

April 2008

Executive summary

Motivation and explanation

The traditional Marcowitz model from 1952 calculates the investor's optimal portfolio allocation for his financial capital – assuming that he can allocate this capital between the market portfolio of stocks and a risk-free asset – and predicts the optimal portfolio weights to be constant throughout the investor's life. This model is further extended in Campbell and Viceira (2002), and Lund Larsen (2007), where the investor is assumed to hold, in addition to his financial capital, a human capital – i.e. his discounted, future work income. The implication of this human capital is that early in life, when the investor's human capital is large, he should allocate his financial capital differently from late in life, when he has got little, or no human capital left. Whether the stock share increases or decreases over the life cycle depends on the correlation between the investor's work income and the stock market index. A low correlation implicates an increasing share, whereas a high correlation leads to a decreasing share. Since most investors face a low correlation between these two assets, the traditional investment advice is to increase the stock share as the investor ages. Also, young investors are recommended to hold all of their financial capital in the risky asset, and the stock share is expected to fall as the investor faces a higher net value.

However, several observations suggest that real investors do not follow this traditional advice. First, young investors tend to hold few, or no, stocks in their financial portfolio. Second, most investors increase their share of stocks as they age, regardless of their correlation between work income and the stock market index. Third, as the typical investor gets wealthier, he increases his share of stocks in his financial portfolio. Why do investors act opposite of what is traditionally recommended by the financial theory?

The answer could be the omission of housing in the traditional model. Since house value amounts to a significant share of the household's total capital, inclusion of this asset is expected to lead to drastic changes in the investor's optimal portfolio allocation throughout the life cycle. This is the reason why the optimal portfolio allocation in the presence of housing is examined in this paper.

To examine how the investor's portfolio allocation is affected by the inclusion of housing, three existing models – Cocco (2000), Flavin/Yamashita (1998) and Yao/Zhang (2005) – including the housing asset will be explained and discussed. One of these models will then be

selected for further analysis. In addition, an attempt will be made to extend the traditional model from Lund Larsen (2007) with the housing asset, as well as the investor's mortgage. Finally, the selected, existing model will be compared to the extended Campbell and Viceira model, using a selection of fictive investors, to examine if the two models predict the same allocation between the risky and risk-free asset.

Results and conclusions

All of the three existing models predict similar portfolio weights. Therefore, only Cocco (2002) will be discussed here. The model is a positive model, meaning that it seeks to explain actual investor behaviour, rather than predicting the optimal behaviour. According to Cocco, the model does reasonably well in explaining the life-cycle pattern observed for real investors. It generates several regressions explaining investor's stock shares, including explanatory factors such as income, age, real estate and financial net value. The model predicts that housing will keep the average investor's financial capital low early in life, as well as for low values of financial net value – reducing the stock share for young and poorer investors. Further, the stock share will increase as the investor ages and/or increases his wealth. Hence, Cocco solves the three puzzles discussed earlier.

Note that since Cocco is a positive model, the behaviour predicted by the model might not be what is optimal for the average investor.

The results for the extended model are somewhat different from Cocco's. Although it solves all of the three puzzles for a moderate correlation between the labour income and stock market index, its results are similar to the ones predicted by the traditional model, though somewhat closer to Cocco, in case of a correlation of zero – the value selected in Cocco (2002). Also, the extended model predicts a positive connection between the housing asset and stock share – the opposite of Cocco's result. This connection depends on the correlation between the housing asset's return and the return on the stock market index – a low correlation leads to a positive connection. Finally, the extended model will predict a negative connection between the investor's mortgage value and stock share – despite of the positive connection predicted by Cocco.

Hence, the extended model partly solves all of the three puzzles in case of a correlation between work income and stock market index of zero, and fully solves them in case of a positive, moderate correlation.

Even though the two models generate somewhat different results, it does not mean that either of them are wrong, since they are based on two different motivations – Cocco seeking to explain actual behaviour, and the extended model trying to predict optimal behaviour.

Further examinations

One possible extension of the paper is to do a thorough development of the traditional model. In this paper, only an intuitive extension has been done, and the extended model is therefore not based on a statistical analysis. To fully conclude that the inclusion of the housing asset actually solves the puzzles from traditional theory, one would have to base the conclusions on a statistically correct model.

Also, when comparing the Cocco model with the extended model, real investors, specifically from the Danish market, should be used, instead of fictive ones. This would make the results much more reliable, since real investors can hold different values for the specific capital elements from the ones used in this paper. The use of real investors, together with a statistically correct extended model, would generate the most reliable results.

Finally, all of the models discussed in this paper, except from Yao/Zhang (2005), ignore the possibility of the investor renting his housing services. Since this would keep the housing asset from constraining the investor's liquid capital, inclusion of a rental market would probably change the optimal portfolio shares for many investors. However, Yao/Zhang concludes that the inclusion of a rental market only affects very old or very poor investors.

Content of the paper

The paper is organized as follows: Chapter 1 introduces the paper's motivation, as well as its restrictions and content. In chapter 2, the traditional model for portfolio allocation is explained. Chapter 3 discusses the three existing models including housing – Cocco (2002), Flavin/Yamashita (1998), and Yao/Zhang (2005). Chapter 4 intuitively extends the traditional model with the housing asset, as well as mortgage value. Chapter 5 compares Cocco from chapter 3 with the extended model from chapter 4, by examining the stock shares the two models predict for a selection of fictive investors. In chapter 6, results and conclusions are discussed.

Indholdsfortegnelse

1	Indledning.....	2
1.1	Klassisk porteføljeteori.....	2
1.1.1	Myopisk.....	2
1.1.2	Langsigtet.....	2
1.2	Puzzles fra klassisk porteføljeteori.....	3
1.3	Problemformulering.....	4
1.4	Opgavens begrænsninger og opbygning.....	5
2	Eksisterende model uden fast ejendom.....	7
2.1	Antagelser.....	7
2.2	Opbygning.....	8
2.3	Implikationer.....	10
3	Eksisterende modeller med fast ejendom.....	11
3.1	Cocco.....	11
3.1.1	Problemformulering.....	11
3.1.2	Model.....	12
3.1.3	Data/parameterverdier.....	15
3.1.4	Resultater model.....	18
3.1.5	Sammenligning af model med data.....	22
3.1.6	Modellens begrænsninger.....	25
3.1.7	Konklusion.....	25
3.2	Flavin/Yamashita.....	26
3.2.1	Problemformulering.....	26
3.2.2	Model.....	26
3.2.3	Data/parameterverdier.....	29
3.2.4	Resultater.....	30
3.2.4.1	Livscyklusmønster prædikeret af modellen.....	31
3.2.4.2	Modellens forudsigende egenskaber.....	35
3.2.5	Konklusion.....	37

3.2.6	Modellens svagheder	38
3.3	Yao/Zhang	39
3.3.1	Problemformulering	39
3.3.2	Model	39
3.3.3	Data/parameterverdier	45
3.3.4	Resultater	47
3.3.4.1	Optimal portefølje uden at eje fast ejendom	47
3.3.4.2	Optimal portefølje ved at eje fast ejendom	50
3.3.4.3	Alternative strategier/parameterverdier og hedging med fast ejendom	51
3.3.4.4	Empiriske resultater	53
3.3.5	Konklusion	54
3.3.6	Modellens svagheder	55
3.4	Valg af model til videre analyse	55
4	Udvidelse af Lund Larsen-model	57
4.1	Den oprindelige model	58
4.2	Antagelser	59
4.3	Resultater	60
4.3.1	Den nye model	60
4.3.2	Eksempel på forskelle	62
4.3.3	Puzzle fra klassisk teori	64
4.4	Konklusion	66
5	Sammenligning af Cocco og udvidet Lund Larsen model	68
5.1	Regressioner til sammenligning	68
5.2	De to modellers forskelle og konklusioner	69
5.3	Datamateriale eksempel-investorer	71
5.4	Resultater analyse	73
5.4.1	Porteføljevægte efter alder	73
5.4.2	Porteføljevægte efter velstand	75
5.5	Årsager til forskelle i resultater	77
5.6	Den udvidede models egenskaber til at løse puzzles	80

6	Konklusion.....	82
	6.1 Hvad betyder fast ejendom for den gennemsnitlige investor?	82
	6.2 Cocco vs den udvidede model.....	84
	6.3 Videre arbejde.....	86
	Referencer.....	88

Vedlæg

1. Tabeller og figurer fra Cocco, Flavin/Yamashita og Yao/Zhang
 - 1.1. Tabel 4 – Regressioner forudsagt af modellen.
 - 1.2. Tabel 7 – Regressioner forudsagt af data. Kan sammenlignes med tabel 4.
 - 1.3. Figur 3 a) – f) – Aktier over nettoværdi, samt gæld over nettoværdi, forskellige aldersgrupper.
 - 1.4. Tabel 13 – Transitioner af porteføljevægte for fast ejendom for PSID dataene mellem 1984 og 1989.
 - 1.5. Tabel 14 – Regressions estimer for ændringer i porteføljevægte.
 - 1.6. Tabel 16 – Konsum- og porteføljevalg fra simulationsanalyse.
 - 1.7. Figur 6 a) – b) – Optimale porteføljeandele i forhold til likvid, finansiel formue, samt i nettoværdi – en funktion af alder.
 - 1.8. Figur 7 – Strategier angående fast ejendom for en investor på 20 år der går ind i periode t som ejer.
 - 1.9. Figur 9 b) – Porteføljevalg for hjemme-ejere ved en korrelation på 0,2 mellem hus og aktier.
 - 1.10. Figur 9 c) – Porteføljevalg for lejere ved en korrelation på 0,2 mellem hus og aktier.
 - 1.11. Tabel 18 – Forklarende variabler for aktiemarkedsdeltagelse – lejere og ejere.
2. Regneark (På CD)
 - 2.1. Aktieandele for klassisk og udvidet model – hentet fra afsnit 4.3.2.
 - 2.2. Analyse fra afsnit 5.4.

1 Innledning

1.1 Klassisk porteføljeteori

1.1.1 Myopisk porteføljemodel

Den myopiske (også kaldet statiske) porteføljemodel blev udviklet af Harry Markowitz i 1952 (Campbell og Viceira, 2002, side 1). Denne model beregner investors optimale porteføljevalg for én periode, og medfører derfor at investorers optimale aktieandel er konstant over livsforløbet. Modellen er mest kendt under navnet ”*mean-variance analysis*”, og forudsætter at alle investorer vælger markedsporteføljen som sit risikable aktiv, investerer noget af sin finansielle formue i denne, samt den resterende del i det risikofri aktiv. Andelen i det risikable aktiv bestemmes af investors risikoaversion, og investor vil altid forsøge at maksimere sit porteføljeafkast.

Løsningen på investors maksimeringsproblem er beskrevet ved følgende formel:

$$\alpha_t = \frac{E_t R_{t+1} - R_{f,t+1} + \sigma_t^2/2}{\gamma \sigma_t^2} \quad (1)$$

der α_t = andel af finansiell formue i aktier på tid t , $E_t R_{t+1}$ = forventet afkast på risikabelt aktiv på tid $t+1$, $R_{f,t+1}$ = afkast på det risikofri aktiv på tid $t+1$, γ = investors risikoaversion, og σ_t^2 = porteføljens varians på tid t . $E_t R_{t+1} - R_{f,t+1}$ = risikopræmie på aktier. Denne løsning er baseret på forudsætningen om at investor har *power nytte* (forklares i afsnit 2.1 – side 7 – og 3.1.2 – side 12), og at det risikable aktivs afkast er lognormalfordelt. Ifølge (1) øger investors aktieandel med risikopræmie på aktier og med reduceret risikoaversion og risiko på aktier.

1.1.2 Langsigtig porteføljemodel

Den statiske porteføljemodel er i de senere år blevet erstattet af multiperiode-modeller. Disse implicerer at investors optimale aktieandel ikke er konstant gennem livet, men ændrer sig fra periode til periode. Nyere udgaver af disse modeller inkluderer, i tillæg til den finansielle formue, investors human kapital, som er lig med den tilbagediskonterede sum af investors fremtidige lønindkomst. Ifølge denne model afhænger den individuelle investors optimale aktieinvestering af lønindkomstens korrelation med aktiemarkedets udvikling, størrelsen på

finansiell og human kapital, samt de klassiske variablene i Markowitz' model. Løsningen på investors maksimeringsproblem bliver nu følgende (Lund Larsen, 2007, side 3):

$$\alpha^* = \left(1 + \frac{\bar{H}}{F}\right) \left(\frac{\mu - r_f + \sigma^2/2}{\gamma\sigma^2}\right) - \left(\frac{\bar{H}}{F}\right) \left(\frac{\sigma_{H,F}}{\sigma^2}\right) \quad (2)$$

der α^* = optimal aktieandel af finansiell formue, H = human kapital, F = finansiell formue, H/F = middelværdien av H_t/F_t, $\sigma_{H,F}$ = kovariansen mellem investors lønindkomst og aktieafkast.

Forklaring på de øvrige variabler ses i forklaringen til formel (1).

Implikationen af multiperiode-modellerne er at investors optimale andel af den finansielle formue, som skal investeres i aktier, er størst når investor har en høj human kapital der har en lav korrelation med aktieafkastet. Da de fleste har en lønindkomst som er lavt korreleret med aktieafkastene, er det klassiske råd fra finansielle rådgivere derfor at aktieandelen skal være på sit højeste når investor begynder at arbejde, og reduceres gradvist eftersom investor ældes.

1.2 Puzzles fra klassisk porteføljet teori

Selv om teoriens opgave er at forudse hvad den rationelle investor bør gøre ved investering af den finansielle kapital, er der i markedet mange eksempler på forskelle mellem teori og praksis. Wallmeier og Zainhofer (2006), side 11, peger på fire puzzles som klassisk porteføljet teori ikke er i stand til at forklare. Den første af disse er *the participation puzzle* (deltagelses puzzle). Klassisk porteføljet teori forudsiger at hvis en fast omkostning ved at deltage i aktiemarkedet er inkluderet, vil deltagelsesgraden blandt unge investorer hurtigt stige til nær 100 %, og derefter forholde sig konstant. Empiriske studier beviser derimod at en stor del af alle husholdninger ikke deltager i aktiemarkedet overhovedet. Klassisk porteføljet teori kan ikke forklare dette puzzle.

De tre sidste puzzles kaldes af Wallmeier og Zainhofer for *composition puzzles*, og omhandler investorernes allokering af deres finansielle kapital. Teorien siger at unge investorer skal have 100 % af deres finansielle formue i aktier, da disse har en høj human kapital. De skal også reducere deres aktieandel samtidig med at de ældes, da deres human kapital – og dermed

”investering” i det risikofri aktiv – synker. Endvidere skal optimal aktieandel synke når investors velstand stiger. Dette er fordi deres human kapital bliver mindre vigtig i forhold til deres finansielle kapital, og de har derfor relativt mindre kapital ”investeret” i det risikofri aktiv. Det forudsættes her at investorenes lønindkomst ikke er korreleret med aktieafkastene. I praksis følger ikke investorer de klassiske investeringsråd. De fleste unge investorer holder en meget lav aktieandel, og denne stiger som oftest med alderen. I tillæg reduceres aktieandelen ikke når investors velstand øges, den stiger derimod.

Der vil fokuseres på de tre sidste puzzles i denne afhandling.

En af årsagerne til de tre puzzles kan være multiperiode-modellens restriktioner. Da denne model kun inkluderer investors finansielle kapital og human kapital, ignorerer den en af de vigtigste former for kapital i de fleste husholdninger: Kapital bundet i fast ejendom. En amerikansk undersøgelse fra 2001 viser at husets værdi udgør 55 % af husejeres totale aktiver (Yao og Zhang, 2005, side 1), og det er derfor sandsynligt at inkludering af denne kapital i investors totale formue vil ha implikationer for investors optimale porteføljesammensætning gennem livsforløbet. Samtidig er det højst almindeligt, at husholdninger som ejer et hus også har gæld, og denne vil trolig også påvirke optimal aktieandel når investors porteføljesammensætning skal kalkuleres.

Da de ovenfor nævnte puzzles ses på som en stor udfordring af mange forskere inden økonomi - de udgør et hinder for at bygge modeller der kan give resultater som er mere sammenhængende med de observerede data – er det desto vigtigere at få dem løst, så investeringsrådgivere verden over kan give sine kunder en bedre vejledning, og investorerne dermed kan holde en aktieandel som genspejler deres finansielle forhold og personlige præferencer. Dette er hovedårsagen til at denne afhandling vil undersøge konsekvenserne af at inkludere kapital i fast ejendom i investors maksimeringsproblem.

1.3 Problemformulering

Som nævnt ovenfor vil inkludering af formue i fast ejendom trolig påvirke investors optimale portefølje andeler, da en stor del af de fleste husholdningers formue er i form af boliger.

Denne afhandling vil blandt andet forsøge at afklare hvordan investors optimale porteføljesammensætning ændrer sig hvis fast ejendom inkluderes i analysen – vil optimal andel af finansiel formue i aktier være upåvirket af inkludering af fast ejendom, vil den øges eller reduceres? Hvilke faktorer skal være til stede for at en eventuel ændring er størst? Det er også af interesse at undersøge hvordan allokeringen af investors finansielle formue mellem aktier og det risikofri aktiv ændres i løbet af livet. Kan inkludering af fast ejendom forklare konflikten mellem klassisk teori og praksis, og hvis den ikke kan, er der andre faktorer der kan tænkes at påvirke forskellen? Gæld knyttet til fast ejendom vil også blive forsøgt inkluderet i investors porteføljeanalyse. Bør investorer med gæld på sin bolig investere mere eller mindre i aktier end de der er gældfrie? Hvad er betingelserne for at eventuel gæld skal påvirke investors portefølje? Ved at svare på disse spørgsmål er det forhåbentlig muligt at løse de tre puzzles beskrevet i kapitel 1.2, og nye modeller kan blive udviklet for at forklare investorers virkelige investeringer.

Afhandlingen udreder eksisterende modeller der inkluderer fast ejendom som en del af investors totale formue, og de vigtigste fund gjort af disse modeller vil blive diskuteret. En af disse modeller vil blive valgt til videre analyse.

Det vil også undersøges hvordan modellen i Lund Larsens artikel (2007) påvirkes af fast ejendom og gæld. Det vil forsøges at udvikle en ny udgave af denne som inkluderer disse typer kapital, og som derfor kan blive grundlaget for fremtidige investeringsråd, der genspejler investorernes finansielle forhold og præferencer mere nøjagtig end den nuværende model.

Sidst i opgaven vil der foretages en sammenligning mellem den tidligere udvalgte model, og den udvidede Lund Larsen model. Forskelle og ligheder vil peges på, og det vil forsøges at konkludere om den udvidede Lund Larsen model egner sig til virkelige investorer.

1.4 Afhandlingens begrænsninger og opbygning

Da afhandlingens omfang bliver begrænset i både tid og ressourcer, er det nødvendigt at indføre nogle restriktioner. Disse vil blive forsøgt at være så ubetydelige som muligt, men alligevel kan det tænkes at de kan påvirke afhandlingens kvalitet til en vis grad. Følgende restriktioner er gældende:

Afhandlingen antager at alle investorer er rationelle, og derfor vil deres investering i aktier være investering i markedsporteføljen. Investorernes individuelle risikoaversion vil så afgøre hvor stor andel aktier og risikofrie aktiver de vil holde. I realiteten holder investorer ofte kun få aktier, og er altså derfor ikke fuldt diversificerede.

Det antages også i afhandlingen at investorerne med sikkerhed kender alle aktivers parametre. Dette vil sige at både aktiers og risikofri aktivers afkast, varianser og korrelation med andre aktiver er kendt i markedet, og også udviklingen af disse over tid.

Afhandlingen inkluderer kun gæld på fast ejendom. Det antages at gælden ikke kan være højere end husets værdi.

Opgaven ignorerer for det meste skat, bortset fra i afsnit 3.2, hvor Flavin og Yamashita inkluderer skat i deres model. Eventuelle skattefordele ved for eksempel at holde gæld vil derfor ignoreres.

I tillæg vil de beskrevne modellens restriktioner og antagelser være gældende. Disse vil blive diskuteret under de enkeltes kapitler.

Afhandlingen er opbygget på følgende måde: Kapitel 2 gør grundigere rede for modellen for optimal aktieandel udviklet i Campbell og Viceira (2002) og beskrevet i Lund Larsen (2007). Her diskuteres modellens antagelser og udvikling. Kapitel 3 beskriver tre af de allerede eksisterende modeller som inkluderer fast ejendom: Cocco (2000), Flavin/Yamashita (1998) og Yao/Zhang (2005). Dette kapitel udreder modellernes restriktioner, antagelser, konklusioner og eventuelle forbedringer, og vælger til slut en af modellerne som en hovedmodel for videre analyse. I kapitel 4 forsøges modellen beskrevet i kapitel 2 udvidet med fast ejendom og eventuelt også investors gæld. En endelig formel for optimal aktieandel af likvid formue er målet for dette kapitel. Kapitel 5 sammenligner den i kapitel 3 udvalgte model med den udvidede Lund Larsen model i kapitel 4 – her vil forskelle/ligheder og fordele/ulemper blive diskuteret. Til sidst opsummerer og konkluderer kapitel 6 de vigtigste resultater, diskuterer hvorvidt afhandlingen har løst de tre puzzles fra kapitel 1, samt foreslår eventuelt videre arbejde med modellerne.

2 Eksisterende model uden fast ejendom

Den langsigtede porteføljemodel udviklet i Campbell og Viceira (2002) og beskrevet i Lund (2007) er blevet en meget anvendt model ved udregning af investors optimale kapitalallokering. Dette kapitel redegør grundigere for denne model end beskrivelsen i kapitel 1.1.2, og vil forklare modellens antagelser, opbygning og implikationer. Se Campbell og Viceira, kapitel 6, samt Engsted (2006), lektion 24, for videre forklaringer.

2.1 Antagelser

I modsætning til den myopiske porteføljemodel udviklet af Markowitz, forudsætter Campbell og Viceiras model at investor har en langsigtet investeringshorisont. Dette er mere realistisk end at antage at investors investeringer kun foregår i én periode. Pensionskasser og investeringsforeninger henvender sig blandt andet til den langsigtede investor, og mange kendte investeringsråd vedrører langsigtede investeringer. I tillæg kan man løse "The Asset Allocation Puzzle" ved at skelne mellem lang- og kortsigtede investorer. Dette puzzle går ud på at selv om forholdet mellem lange obligationer og aktier skal være uafhængige af risikoaversion, anbefaler investeringsrådgivere meget risiko averse investorer at holde en højere andel af lange obligationer i forhold til aktier (Campbell og Viceira, 2002, side 79 - 80).

Der antages videre at der eksisterer to typer aktiver: Det risikable og det risikofri. Både aktiekursen og renten er antaget til at være iid (independent, identically distributed) og log-normalfordelt, noget der giver meget gode statistiske egenskaber. Dette indebærer dog at der ikke er nogen tidsvariation i variansen, og heller ingen autokorrelation. Dette er meget strenge antagelser.

Investor antages at reinvestere alle afkast. Dette vil altså sige, at investor aldrig vil holde kontanter, men allokere all sin kapital mellem det risikable eller risikofri aktiv.

For investor gælder følgende CRRA (power) nyttefunktion:

$$E_t (W_{t+1}^{1-\gamma} - 1)/(1-\gamma) \tag{3}$$

hvor W = finansiel formue, og γ = investors risiko aversion. Investor er endvidere mere optaget af at kunne forbruge i fremtiden, end størrelsen på sin formue. Dette medfører at en yderligere antagelse for modellen er antagelsen om investors nyttefunktion for konsum. Der eksisterer, i tillæg til den finansielle kapital, en human kapital som ikke kan handles. Human kapital er summen af al fremtidig arbejdsindkomst, diskonteret tilbage med den risikofri rente. Hverken human kapital eller finansiel kapital kan være negative.

Investors risikoaversion forudsættes at være konstant gennem hele investeringshorisonten. I modellen spiller $\gamma = 1$ en speciel rolle. I dette tilfældet har investor log-nytte, og vælger derfor porteføljen med det højeste log-afkast (også kaldt den vækst-optimale portefølje). Ved $\gamma > 1$ vælger investor en sikrere allokering af kapital, og ved $\gamma < 1$ søges den mest risikable portefølje.

Der antages som i afsnit 1.3 at der ikke eksisterer skat eller transaktions omkostninger, samt at alle investorer handler den veldiversificerede markedsporteføljen som det risikable aktiv.

2.2 Opbygning

Med antagelserne angående aktieafkastet svarer maksimering av (3) til (Campbell og Viceira (2002), side 26):

$$\max_{\alpha} E t(r_{p,t+1}) + \frac{1}{2}(1 - \gamma)\sigma_{pt}^2 \quad (4)$$

hvor $r_{p,t} \equiv \ln(1 + R_{p,t})$, og σ_{pt}^2 = den betingede varians på $r_{p,t}$. Løsningen til (4) er

$$\alpha = \frac{E r - r_f + \sigma^2/2}{\gamma\sigma^2} = \frac{\mu + \sigma^2/2}{\gamma\sigma^2} \quad (5)$$

der $\mu = E r - r_f$. Den optimale aktieandel er derfor konstant gennem hele investeringshorisonten. Denne svarer fuldstændig til (1), og med antagelserne om iid log-normalfordelte aktieafkast og CRRA-nytte for investor, samt uden human kapital, er den

langsigtede porteføljesammensætning optimalt set derfor den samme som for den myopiske investor.

(5) gælder imidlertid kun for investorer uden human kapital. Da human kapital udgør ca. $\frac{2}{3}$ af den gennemsnitlige investors totale kapital (Engsted, 2006, lektion 24, side 1), vil det blive nødvendigt at udvide modellen for at komme frem til en optimal portefølje der genspejler investors præferencer på en bedre måde.

Afkastet på den humane kapital i tidspunkt t er arbejdsindkomsten for denne periode. Om dette afkast korrelerer med aktieafkastet er derfor afgørende for hvor høj aktieandel investor er villig til at holde. Ved korrelation lig med nul er arbejdsindkomsten risikofri, og investor har derfor hele sin human kapital placeret i det risikofri aktiv. Dette indebærer at man skal holde mere aktier end hvis man havde en human kapital der var positivt korreleret med aktieafkastet. Følgende sammenhæng gør sig gældende ved en korrelation lig med nul (Campbell og Viceira, 2002, side 163):

$$\alpha^* = \frac{\mu + \sigma^2/2}{\gamma\sigma^2} \left[1 + \frac{H_t}{W_t} \right] \quad (6)$$

der α^* = optimal aktieandel af finansiel kapital, H_t = human kapital på tidspunkt t , og W_t = finansiel formue på tidspunkt t . Investor vil nu få en optimal aktieandel der er den samme som tidligere, men med et tillæg for human kapital over finansiel kapital.

Antager man så at investor har en arbejdsindkomst der er korreleret med aktieafkastet, vil modellen udvides yderligere (Lund Larsen, 2007, boks 2 – tilsvarende (6.11) i Campbell og Viceira, 2002):

$$\alpha^* = \frac{\mu + \sigma^2/2}{\gamma\sigma^2} \left[1 + \frac{H}{W} \right] - \frac{H}{W} * \frac{\sigma_{H,W}}{\sigma^2} \quad (6)$$

der H/W = det gennemsnitlige forhold mellem human og finansiel kapital, og $\sigma_{H,W}$ = kovariansen mellem den humane og finansielle kapital. Det kan ses af (6) at investors optimale aktieandel vokser når korrelationen mellem human og finansiel kapital reduceres, samt når human kapital over finansiel kapital vokser.

2.3 Implikationer

Som det kan ses af (6), øges den optimale aktieandel når korrelationen mellem arbejdsindkomsten og aktieafkastet reduceres. Samtidig medfører (6) at den optimale aktieandel øges med H/W . Dette forhold er højt i begyndelsen af investors liv af to årsager. For det første har investor en høj forventet fremtidig arbejdsindkomst, og for det andet har han ikke kunnet nå at spare en stor finansiell formue op.

Dette implicerer visse konsekvenser for hvordan investor skal justere sin aktieandel over investeringshorisonten, og disse afhænger af korrelationen mellem arbejdsindkomsten og aktieafkastet. En investor med lav korrelation skal holde en høj aktieandel ved begyndelsen af sin investeringshorisont, når human kapital er højest, og gradvis reducere denne eftersom tiden for pension nærmer sig. På denne måde afdækker han risikoen for et fald i lønindkomsten ved at holde aktier – det sidste led i (6) bliver derfor kaldt *lønindkomst-hedgeefterspørgselen* efter aktier.

I modsætning skal en investor med høj korrelation (børsmægler e.l.) holde en lav aktieandel i starten på sin arbejdskarriere, og gradvis øge denne eftersom tiden går. Dette kan forklares ved at for perfekt korrelation svarer human kapital til en investering i det risikable aktiv, og investor skal derfor holde hele sin finansielle kapital i det risikofri aktiv.

Ifølge tabel 7.1 i Campbell og Viceira (2002) viser empiriske studier at aktieafkast og lønindkomster er enten ukorrelerede eller positivt korrelerede med en korrelation på 30% - 50%.

Risikoaversion spiller også en rolle for den optimale aktieandel. I tilfældet med 35% korrelation vil aktieandelen vokse med tiden for en normalt risikoavers investor (Engsted, 2006, lektion 24, side 9). I modsætning, vil aktieandelen falde med horisonten hvis investoren er meget risikoavers. Dette illustrerer vigtigheden af at finde den rigtige risikoaversion for hver enkelt investor.

Disse implikationer medfører at pensionskasser og investeringsforeninger i princippet bør dele sine kunder op efter alder, lønkorrelation og risikoaversion, og holde forskellige aktieandele for hver gruppe. På denne måde bliver hver investors portefølje så optimal som muligt.

Der eksisterer to forhold der kan komplicere (6). For det første kan investor selv øge eller reducere sin human kapital ved at arbejde mere eller mindre. Dette medfører at investor kan holde mere risikable porteføljer hvis ønsket. For eksempel, ved lav korrelation kan investor arbejde mere for at kompensere for et tab i sine finansielle porteføljer.

For det andet kan aktieafkastet indeholde *mean-reversion* (negativt korreleret med tidligere aktieafkast). Siden en antagelse i (6) er at aktieafkastet er iid, vil negativ autokorrelation medføre ændringer i modellen. Mean-reversion vil alt andet end lige føre til at investors optimale aktieandel stiger på et givet tidspunkt, samtidig med at den bliver tidsvarierende. I (6) vil derfor mean-reversion føre til at investor skal sænke sin aktieandel når indikatorerne (f.eks. P/E) forudsiger dårlige afkast. Dette gælder for alle investorer, også dem med en sikker lønindkomst.

I denne afhandling ses der bort fra disse to forhold.

Modellen i (6) medfører også de fire puzzles beskrevet i afsnit 1.2. Disse vil forsøges at løses i de følgende kapitler ved at inkludere fast ejendom.

3 Eksisterende modeller med fast ejendom

Der eksisterer flere porteføljemodeller som inkluderer fast ejendom som formueobjekt. I dette kapitel vil tre af disse diskuteres – Cocco (2000), Flavin/Yamashita (1998) og Yao/Zhang (2005). Modellernes antagelser, data, resultater og svagheder vil undersøges, og en af disse vil derefter vælges som grundlag for den videre analyse.

3.1 Cocco (2000)

3.1.1 Problemformulering

Ved at udvikle modellen ønsker Cocco først og fremmest at få svar på hvordan investors allokering mellem det risikable og det risikofri aktiv ændrer sig når fast ejendom og gæld på fast ejendom inkluderes i total formue. Specielt ønsker han at få svar på om inkludering af dette aktiv fører til en reduceret aktieandel hos investorer på grund af risikoen ved at holde

fast ejendom samt dens illikviditet. Modellen undersøger også hvilke faktorer der bestemmer hvor meget gæld knyttet til fast ejendom investorer holder. Til slut ser modellen på hvordan risiko på lønindkomsten påvirker svarene på disse spørgsmål.

Modellen undersøger også hvordan fast ejendom påvirker investorers villighed til at betale den faste omkostning for deltagelse i aktiemarkedet.

3.1.2 Model

En af de vigtigste antagelser i Cocos model er at den kun tager hensyn til investorer der ejer, og investorer som lejer sin bolig er derfor ikke med i analysen. Endvidere er modellen dynamisk, og investorerne vælger størrelsen på sit hus sammen med de resterende finansielle aktiver. Modellen inkluderer både finansiell og human kapital.

I modellen har investor fire beslutninger der skal tages: Størrelsen på fast ejendom, hvor meget der skal forbruges på andet end fast ejendom, hvor meget gæld på fast ejendom der skal optages, og hvordan han vil allokere sin resterende finansielle formue mellem aktier og det risikofri aktiv.

Cocco antager at investors levetid er T perioder, og beslutninger angående størrelse på hus (H_t) og konsum (C_t) skal tages i hver periode t. Værdien på investors hus med størrelse H i periode t er HP_t , hvor P_t er prisen per enhed hus i periode t.

Investor får nytte både fra at eje et hus og forbruge andre varer, og efter periode T får han nytte fra terminalværdien – W_{T+1} . Nyttetfunktionen er beskrevet som CRRA (power) nytte¹, og ser sådan ud:

$$U_1 = E_1 \sum_{t=1}^T \beta^{t-1} \frac{(C_t^{1-\theta} H_t^\theta)^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \beta^T \frac{W_{T+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma} \quad (7)$$

der U_1 = investors nytte i periode 1, β = diskonteringsfaktor, C = andet konsum, γ = investors risikoaversion og θ = præference for hus over andet konsum. Af (7) kan det ses at investors nytte består af to dele: Den forventede, tilbagediskonterede sum af nytten fra hus og andet konsum, samt den tilbagediskonterede nytte fra finansiell formue i perioden for investors død

¹ CRRA nyttefunktionen er i teorien beskrevet ved: $U(W) = (W^{1-\gamma} - 1)/(1-\gamma)$, der $\gamma \geq 0$. Engsted, 2006, Lektion 24, side 4.

(terminalværdien). Nyttens for begge dele i (7) vil stige med reduceret risiko aversion. Investor vil altid søge at maksimere (7).

Investor arbejder i K perioder af sit liv, og modtager hver periode en løn Y_t . Hans lønindkomst i periode t er givet ved

$$\tilde{y}_{it} = \begin{cases} f(t, Z_{it}) + \tilde{u}_{it}, & \text{for } t \leq K \\ P, & \text{for } t > K \end{cases} \quad (8)$$

der $y_{it} = \ln(Y_{it})$ = investor i 's arbejdsindkomst på tidspunkt t , $f(t, Z_{it})$ = deterministisk funktion af alder (t) og andre personlige karakteristika (Z_{it}) i lønindkomsten. u_{it} er et fejllid der kan deles op i et aggregeret chok (η_t) samt idiosynkroniske komponenter (ω_{it}), der ω_{it} er i.i.d normalfordelt med forventning nul og varians σ_ω^2 . P = en fast pension der tjenes efter periode K .

Investors lønindkomst fra periode 1 til K vil dermed afhænge af investors alder og personlige karakteristika – køn, personlige egenskaber, erfaring, etc.... Et aggregeret lønshok samt et tilfældigt fejllid kan i tillæg øge eller reducere denne indkomst.

Fra alder $K+1$ og op til investors død vil lønindkomsten være lig med P , som er den faste pension der modtages for alle perioder efter pensionsalder.

Det antages at nytten investor får fra sin bolig hænger sammen med størrelsen på det. Det antages også at huspriser som oftest er positivt korreleret med chok i investors lønindkomst. Videre antages det at der eksisterer en transaktionsomkostning for at sælge et hus. Denne omkostning opgives i en fast procentandel (λ) af husets værdi. Dette resulterer i en vis illikviditet for fast ejendom. I tillæg antager Cocco en årlig vedligeholdelseskostning på en vis andel (δ) af husets værdi.

I modellen antages det at der i tillæg til fast ejendom eksisterer tre finansielle aktiver investor kan holde. To af disse er det risikofrie aktiv, Treasury bills (tilsvarende obligationer), med et årligt bruttoafkast på R_F , samt det risikable aktiv, aktier, med et årligt bruttoafkast på R_t . Logafkastet på det risikable aktiv er givet ved

$$\log(\tilde{R}_t) = \mu + \tilde{\epsilon}_t \quad (9)$$

der $\mu > 0$ er det forventede logafkast, og $\tilde{\epsilon}_t$ er et tilfældigt fejlded der har en forventning på nul og varians lig med $\sigma_{\tilde{\epsilon}}^2$. Dette fejlded er antaget at være korreleret med fejldedet i det aggregerede chok i lønindkomsten med $\rho_{\epsilon, l}$.

Dollarbeløbet investor har i aktier og bills i periode t er givet ved henholdsvis S_t og B_t . Disse aktiver kan ikke kortsælges – eksempelvis kan investor ikke belåne sin finansielle portefølje - og begge beholdninger må derfor være over eller lig med nul.

Modellen antager også at der findes en fast omkostning (F) for at deltage i aktiemarkedet.

Denne varierer senere i modellen for at se hvilken virkning den har på investors allokering af kapital.

Det tredje finansielle aktiv antages at være gæld på investors hus, hvor R_D er gældsrenten, og D_t er dollarbeløbet holdt i gæld. Investor kan låne op til husets værdi, minus en nedbetaling der betales ved køb af huset. Denne er givet som en andel (d) af husets værdi. Investors lånerestriktion ser dermed således ud:

$$D_t \leq (1 - d)P_t H_t \text{ for } \forall t. \quad (10)$$

der $P_t H_t =$ husets værdi i periode t . Investor antages at kunne justere sin gæld i hver periode t uden omkostninger.

Investors likvide formue i periode t består af forrige periodes beholdninger i aktier og det risikofri aktiv, samt afkast for disse i denne periode. I tillæg er forrige periodes gæld plus denne periodes rentebetalinger trukket fra. Den likvide formue er derfor beskrevet ved følgende sammenhæng:

$$LW_t = R_t S_{t-1} + R_f B_{t-1} - R_D D_{t-1} \quad (11)$$

”Cash-on-hand” er beskrevet som summen af investors likvide formue samt hans arbejdsindkomst, begge i periode t . Denne er derfor denoteret som $X_t = LW_t + Y_t$. Hver periode må investor foretage beslutningerne beskrevet tidligere i dette afsnit, blandt andet hvor høj andel (α) af hans likvide aktiver (aktier + obligationer) der skal investeres i aktier. Investors budgetbetingelse i periode t er

$$S_t + B_t = \begin{cases} X_t - C_t - \delta P_t H_{t-1} + D_t, & \forall t \text{ s.t. } H_t = H_{t-1} \\ X_t - C_t - \delta P_t H_{t-1} + D_t + (1 - \lambda) P_t H_{t-1} - P_t H_t, & \forall t \text{ s.t. } H_t \neq H_{t-1} \end{cases} \quad (12)$$

Der $S_t + B_t =$ beholdning i aktier og obligationer.

Af (12) kan det ses at hvis investor ikke har ændret størrelsen på sit hus siden forrige periode t vil investor kunne købe aktier og det risikofri aktiv for sin "cash-on-hand" og gæld, med fratæk for konsum og husets værdifald. Hvis investor derimod har ændret størrelsen på sit hus siden forrige periode, vil han kunne købe likvide aktiver for sin "cash-on-hand", gæld og nettoværdien af det solgte hus, minus konsum, periodens værdifald på huset og værdi af det nye hus han har købt.

Investors totale formue ved hans død vil være hans daværende "cash-on-hand" og nettoværdien af hans hus efter salg, minus værdifaldet på hans hus i periode $T+1$. Investors formue på tidspunkt $T+1$ er dermed givet ved

$$W_{T+1} = X_{T+1} - \delta H_T P_{T+1} + (1 - \lambda) H_T P_{T+1}. \quad (13)$$

Investor maksimerer (7) på betingelse af (8) til (13). Samtidig antages det at konsum ikke kan være negativ i en hvilken som helst periode t .

Løsningen på problemet kan ikke findes analytisk. Cocco benytter sig derimod af baglæns induktion, som kan gøres på grund af problemets endelige natur. En transitions matrice² bliver benyttet for at komme frem til den aggregerede indkomst proces.

I periode $T+1$ er nytten for alle niveauer af terminal velstand kalkuleret for alle kombinationer af tilstandsvariablene. Nyttens forbundet med valg af hus, konsum, gæld og porteføljevalg i likvide aktiver er også kalkuleret for hver eneste periode t .

3.1.3 Data/parameterværdier

Dataene i Cocos undersøgelse strækker sig fra 1970 til 1992. Parametrene kan deles op i tidsparametre, arbejdsindkomstparametre, husprisparametre, parametre for finansielle aktiver

² Viser sandsynligheder for næste periodes værdier, afhængig af denne periodes værdi - <http://www.eng.buffalo.edu/~kofke/ce530/Lectures/Lecture8/sld004.htm>

og kreditmarkeder, samt andre parametre. For at finde reelle værdier er både lønindkomster og huspriser deflateret med Consumer Price Index, der 1992 er brugt som basisår.

I modellen er hver periode t lig med fem år i det virkelige liv. Investoren begynder sit investeringsliv ved alder 25, pensionerer sig ved 65, og dør i en alder af 75.

Dataene for arbejdsindkomsten er hentet fra PSID³, og er begrænset til de familier med et mandligt overhoved. Lønindkomsten er meget bredt defineret for at tage hensyn til den selvforsikring mod indkomstrisiko husholdninger benytter sig af, og inkluderer blandt andet understøttelse, sygedagpenge, børnepenge, etc.

Alle aldersgrupper hvor fem års lønindkomst ikke var tilgængelig er udeladt fra undersøgelsen.

I formel (8) inkluderer Z_t alders dummies⁴, en fast familieeffekt, civilstatus og husholdningens komposition.

Variansen for η_{it} og ω_{it} er fundet ved at kalkulere residualene i regressionen for log-indkomst. Arbejdsindkomst ved pensionering er sat til at være lig med den gennemsnitlige arbejdsindkomst for de pensionerede i PSID-dataene.

Huspriserne i undersøgelsen er fundet ved at spørge de udvalgte husholdninger i PSID-dataene om husets markedsværdi, og er dermed ikke baseret på virkelige transaktioner. Visse fejl kan opstå ved en sådan subjektiv værdisætning, men metoden har understøttelse fra Skinner (1994), der fandt at husejernes subjektive værdi faldt meget godt sammen med de objektive mål fra det amerikanske Commerce Department.

Følgende formel er brugt for den gennemsnitlige logpris på hus i undersøgelsen:

$$p_t = \frac{\sum_{i=1}^{N_t} p_{it}}{N_t}, \quad t = 1970, \dots, 1992. \quad (14)$$

der p_{it} = den reelle logpris på hus i ved tid t , og N_t = antal observationer i periode t . Den gennemsnitlige logpris er altså summen af pris per enhed for alle investorer, divideret med antal investorer i undersøgelsen.

Formel (14) er så brugt til at estimere følgende formel der viser den detrendede logpris for én husenhed:

³ The Panel Study of Income Dynamics, <http://psidonline.isr.umich.edu/>

⁴ Hver alder/aldersgruppe bliver tildelt en vis værdi. Er vist i Cocco (2002), figur 1.

$$\tilde{p}_t = \beta \eta_t.$$

(15)

der β = diskonteringsfaktor og η_t = det aggregerede prischok.

Den årlige prisstigning for hus er sat til at være 1%. Korrelationen mellem aggregeret arbejdsindkomst og fluktuationerne i huspriser er signifikant og lig med 0,597.

Beskrivelse	Parameter	Værdi
Risikoaversion	γ	5
Diskonteringsfaktor	β	0,96
Præference for hus	θ	0,1
Nedbetaling	d	0,15
Depresieringsfaktor	δ	0,01
Transaktionsomkostninger	λ	0,08
Risikofri rente	RF - 1	0,02
Gældsrente	RD - 1	0,04
Middelverdi aktieafkast	$\exp(\mu + \sigma_\eta^2/2) - 1$	0,1
Std af log aktieafkast	σ_η	0,1674
Faste omkostninger	F	\$1 000
Korr. arb.indkomst og aktieindekset	$\rho_{Y,\mu}$	0
Korr. fast ejendom og arb.indkomst	$\rho_{H,Y}$	0,597

Tabel 1: Oversigt over parametre og parameterværdier i Cocos model.

For de finansielle aktiver og kreditmarkeder er følgende parametre gældende: Den risikofri rente er sat til 2% per år. Gældsrentepremien er kalkuleret ved at trække tremåneders Treasury bill rente fra 30-års fast FHA⁵ nominel gældsrente, og gennemsnittet i perioden 1964 til 1997 er 3,01%. I modellen er imidlertid en præmie på 2% benyttet, af den grund at modellen ikke inkluderer optionen på fremtidig inflation der indgår i den virkelige gældsrentepremie.

Årligt forventede afkast på det risikable aktiv er sat til 10%, med en standardafvigelse på logafkastet på 16,74%. Engangsbeløbet for at deltage i aktiemarkedet er foreløbig sat til \$1 000. Korrelationen mellem arbejdsindkomst og aktieafkast i modellen er estimeret til 0,047, men er sat til nul i basiscaset på grund af insignifikans.

⁵ Federal Housing Administration - <http://www.fha.gov/>

Andre parametre i modellen er i basiscaset sat til følgende: Risikoaversionen er lig med 5, diskonteringsfaktoren på årlig basis er 0,96 og præferencen for hus frem for andet konsum er sat til 0,1. Huspræference-parametren er i praksis varierende over livsforløbet, men er sat til at være konstant i modellen.

Transaktionsomkostningerne ved at bytte hus er sat til 8%, selv om den i lighed med huspræference-parametren godt kunne antages at være varierende med t. Nedbetalingsandelen er sat til 15%, og årlig depreciationsrate er i modellen lig med 1%.

3.1.4 Resultater for model

For at finde determinanterne for portefølje kompositionen ved inkludering af fast ejendom bliver cross-section variationen i porteføljekompositionen undersøgt med hensyn til nettoværdi og alder. Heaton og Lucas (2000) klassificerer nettoværdi på følgende måde: 1) "Likvid nettoværdi" er summen af aktier og risikofri aktiver minus gæld, 2) "finansiel nettoværdi" er likvid nettoværdi plus husets værdi, og 3) "total nettoværdi" er finansiel nettoværdi plus kapitaliseret arbejds- og pensionsindkomst (human kapital). Likvide, finansielle og totale aktiver forklarer de samme klassificeringerne, men uden subtraktionen af gæld.

To grupper af finansiel nettoværdi er vurderet i modellen - mindre end og mere eller lig med \$100 000. I modellen antages det at gruppen med lav finansiel nettoværdi ikke deltager i aktiemarkedet på grund af begrænsede midler. For denne gruppe er en meget høj andel af formuen derfor bundet i hus - nærmere bestemt 89%. Disse har også meget gæld - middelværdien for gæld over finansielle aktiver er 37%. For gruppen med høj finansiel nettoværdi er andelen for fast ejendom i forhold til total formue meget lavere, nemlig 51%. Tabel 2 viser de forventede andele af aktier og risikofri aktiver i forhold til finansiel nettoværdi forudsagt af modellen.

Asset	Liquid Assets		Financial Assets		Total Assets	
	< 100k	≥ 100k	< 100k	≥ 100k	< 100k	≥ 100k
Stocks	0.362	0.964	0.095	0.480	0.032	0.209
Bills	0.638	0.036	0.017	0.014	0.004	0.008
Liquid Assets	1.000	1.000	0.112	0.494	0.036	0.217
Real Estate			0.888	0.506	0.269	0.227
Financial Assets			1.000	1.000	0.305	0.544
Human Capital					0.694	0.556
Total Assets					1.000	1.000
Debt			0.368	0.007	0.091	0.004
Stock Mkt Part.	0.371	1.000				

Tabel 2: Forventede andele af aktier og risikofri aktiver i forhold til finansiel nettoværdi forudsagt af modellen (table 3 i Cocco).

Som diskuteret i afsnit 2.3, er det klassiske investeringsråd at hvis arbejdsindkomst og aktieafkast er ukorreleret, skal investor starte sin investeringsperiode med en høj andel aktier, og reducere denne gradvis eftersom tiden går mod pension. I realiteten er dette imidlertid ikke et tilfælde. Empiriske undersøgelser har bevist, at porteføljeandel investeret i aktier faktisk stiger med alderen, modsat af klassiske investeringsråd. Kan formue i fast ejendom forklare dette?

Asset	Liquid Assets				Financial Assets				Total Assets			
	< 35	35 – 50	50 – 65	≥ 65	< 35	35 – 50	50 – 65	≥ 65	< 35	35 – 50	50 – 65	≥ 65
Stocks	0.008	0.153	0.692	0.713	0.002	0.043	0.276	0.108	0.000	0.008	0.091	0.066
Bills	0.992	0.847	0.308	0.287	0.030	0.018	0.007	0.016	0.004	0.002	0.002	0.010
Liquid Assets	1.000	1.000	1.000	1.000	0.032	0.061	0.283	0.124	0.004	0.010	0.093	0.076
Real Estate					0.968	0.939	0.717	0.876	0.127	0.150	0.207	0.675
Financial Assets					1.000	1.000	1.000	1.000	0.131	0.160	0.300	0.751
Human Capital									0.869	0.840	0.700	0.249
Total Assets									1.000	1.000	1.000	1.000
Debt					0.651	0.461	0.109	0.227	0.085	0.073	0.029	0.192
Stock Mkt Part.	0.008	0.153	0.692	0.766								

Tabel 3: Udviklingen af porteføljesammensætning for den likvide formue gennem livet forudsagt af modellen (table 4 i Cocco).

Tabel 3 viser udviklingen af porteføljesammensætning for den likvide formue forudsagt af modellen. Denne viser netop en øgning i aktier over livsforløbet. En forklaring på dette er at tidlig i en investors liv vil investeringen i fast ejendom holde likvide aktiver lave, noget som fører til at investorerne ikke er villige til at betale den faste omkostning for at handle aktier. Likvide aktiver er kun 3% af finansielle aktiver for unge investorer.

Senere i livet vil også fast ejendom være med til at forhindre at aktieandelen af likvide aktiver synker. Ældre investorers fremtidige konsum er ikke ligeså højt korreleret med de likvide aktiver som for unge investorer på grund af en lav human kapital, og disse er derfor mere villige til at påtage sig risiko end de unge.

Ifølge tabel 3 er aktiebeholdninger mindre vigtige i forhold til finansielle aktiver end likvide aktiver, på grund af formuen i fast ejendom som indgår i finansielle aktiver. Hvis man i tillæg inkluderer human kapital, ser man at formue i form af hus i forhold til totale aktiver øger i vigtighed over livsforløbet. Dette er i modsætning til fast ejendom over finansielle aktiver, hvor vigtigheden reduceres over livsforløbet. Disse forskelle opstår på grund af den synkende human kapital gennem livet.

Cocco bruger i sin model to Tobit regressioner⁶ for at tydeliggøre sammenhængene mellem andelen aktier og andre variabler forudsagt af modellen. I den første er den afhængige variabel aktier over likvide aktiver (LA), finansielle aktiver (FA) eller totale aktiver (TA), mens den i den andre regression er mængden aktier holdt i dollar.

Cocco antager at investors aktieandel afhænger af indkomst, finansiell nettoværdi, alder, fast ejendom over finansiell nettoværdi og gæld over finansiell nettoværdi. De to regressioner ser dermed sådan ud:

$$\left(\frac{Stocks}{j}\right)_i = a_1 + a_2 INC_i + a_3 FNW_i + a_4 AGE_i + a_5 REFNW_i + a_6 MORTFNW_i + \delta_i \quad (16)$$

$$Stocks_i = a_1 + a_2 INC_i + a_3 FNW_i + a_4 AGE_i + a_5 RE_i + a_6 MORT_i + \delta_i. \quad (17)$$

der $j = LA, FA$ eller TA , $INC =$ arbejdsindkomst, $FNW =$ finansiell nettoværdi, $AGE =$ alder, $REFNW =$ formue i fast ejendom over FNW , $MORTFNW =$ gæld på fast ejendom over FNW , $RE =$ formue i fast ejendom, $MORT =$ gæld på fast ejendom, $\alpha =$ regressionernes koefficienter og $\delta =$ regressionernes residualer.

⁶ Bruges normalt for at sikre ikke-negative værdier af den afhængige variabel – Wooldridge, 2006, side 596.

Modellen forudsiger en positiv sammenhæng mellem indkomst og aktiebeholdninger. Dette forklares ved at arbejdsindkomsten ligner mere på det risikofri aktiv end aktier, og højere værdier af indkomst genererer derfor højere aktiebeholdninger. Samtidig vil aktiebeholdningen synke når finansiell nettoværdi øges. Dette er på grund af den reducerede vigtighed human kapital (der ligner det risikofri aktiv) spiller ved en øget finansiell formue. Dette resultat er imidlertid kun gældende for de investorer der allerede har betalt den faste omkostning for at handle det risikable aktiv. For de investorer med lav finansiell nettoværdi er regelen noget anderledes. For meget lave niveauer af likvide midler vil disse investorer ikke investere i aktier, men så snart midlerne overstiger den faste omkostning vil aktiebeholdningen øge med finansiell nettoværdi. Efter en videre øgning i midlerne vil sammenhængen igen ændre sig til at være negativ, sådan at en øgning i finansiell nettoværdi fører til en reduktion i aktiebeholdningen.

Ikke overraskende er REFNW negativt korreleret med aktiebeholdningen. Forklaringen er at investorer med en høj formue i fast ejendom relativt til finansielle midler vil have mindre penge til at investere i aktier, og vil ikke betale den faste omkostning. Hvad der imidlertid er noget mere overraskende, er den positive korrelationen mellem gæld på fast ejendom over finansielle midler og aktiebeholdningen. Dette fænomen kan forklares ved at det som regel er de investorer med en høj forventet human kapital der tager sig råd til at tage høje lån på fast ejendom. Disse investorer har dermed en høj beholdning i "det risikofri aktiv", og besidder højere aktiebeholdninger.

Regressionerne forudsiger en positiv korrelation mellem alder og aktiebeholdning. Dette er det samme resultat som i tabel 3.

Nogle af de forudsagte aktiebeholdninger er imidlertid noget sensitive overfor hvilken afhængig variabel der bruges. For eksempel skifter FNWs koefficient fra negativ til positiv når aktier over totale aktiver bruges.

Cocco undersøger i sin model betydningen af størrelsen på den faste omkostning forbundet med deltagelse i aktiemarkedet, og finder at aktiemarked deltagelsen synker fra 86% til 41% når den faste omkostning øges fra \$500 til \$1 000. Årsagen til denne signifikante reduktion er formuen bundet i fast ejendom, der gør at gevinsterne ved at deltage i aktiemarkedet bliver mindre. Med fast ejendom inkluderet i modellen, vil den faste omkostning derfor i større grad

hindre investorer i at deltage i aktiemarkedet end om fast ejendom ikke var inkluderet i modellen.

Modellen viser også at risiko på huspriserne reducerer investors aktiebeholdning. Dette gælder for begge grupper investorer, både lav og høj finansiel nettoværdi. Alligevel er denne effekt stærkere for gruppen med lavest velstand. Husprisisiko fører også til at færre investorer i gruppen med lavest finansielle midler betaler den faste deltagelses-omkostning.

Til sidst forudsiger modellen en reduktion i aktiebeholdningerne når højere transaktionsomkostninger for justering af husniveau indføres.

Tabel 4 (se vedlæg 1) viser modellens forudsagte koefficienter. Der vil blive lagt væg på koefficienterne for aktier over likvide aktiver, da disse aktiver er de investor kan allokere mellem aktier og det risikofri aktiv, givet husniveau. Koefficienterne er følgende:

$$(\text{Stocks/LA})_i = 29,322 + 0,00138\text{INC}_i - 0,00147\text{FNW}_i + 3,531\text{AGE}_i - 66,01\text{REFNW}_i + 56,318\text{MORTFNW}_i + \delta_i$$

Modellen ser bort fra heterogenitet i investorers præferencer. Da dette kan være en forklaring på de store forskelle i porteføljer man har opdaget i empiriske undersøgelser, undersøger Cocco følgerne af en ændring i diskonteringsfaktoren β , investorernes risikoaversion γ , samt præferencen for hus frem for andet konsum, θ . Han finder at ændring i disse parametre har stor effekt på allokering af den finansielle formue mellem aktier og det risikofri aktiv. Hans undersøgelse viser at for højere γ , højere θ og lavere β vil investors optimale aktiebeholdning reduceres. Dette implicerer store forskelle i de individuelle investorers porteføljer.

Koefficienternes fortegn i modellen vil ikke ændre sig på grund af heterogene præferencer, bortset fra for finansiel nettoværdi og indkomst.

3.1.5 Sammenligning af model med data

Da modellens variable LA, FA og TA ikke inkluderer alle former for aktiver der kan besiddes af en gennemsnitlig investor, redefinerer Cocco disse begreb før sin sammenligning med de faktiske data. "Likvid nettoværdi" indeholder nu aktier, obligationer og kontanter minus all gæld. "Finansiel nettoværdi" inkluderer likvid nettoværdi plus husets værdi, køretøj, anden

fast ejendom og eventuelle forretningsværdier. ”Total nettoværdi” er summen af finansiell nettoværdi og kapitaliseret arbejds- og pensionsindkomst. Human kapital er fundet ved at diskontere fremtidig arbejdsindkomst med en diskonteringsrente på 5%.

Asset	Liquid Assets		Financial Assets		Total Assets	
	< 100k	≥ 100k	< 100k	≥ 100k	< 100k	≥ 100k
Stocks	0.102	0.242	0.015	0.073	0.002	0.030
Cash	0.749	0.599	0.058	0.127	0.011	0.050
Bonds	0.149	0.159	0.022	0.040	0.003	0.015
Liquid Assets	1.000	1.000	0.095	0.240	0.016	0.095
Real Estate			0.762	0.488	0.119	0.169
Vehicles			0.109	0.064	0.014	0.021
Other Real Estate			0.023	0.104	0.005	0.049
Business			0.011	0.104	0.004	0.059
Financial Assets			1.000	1.000	0.158	0.393
Human Capital					0.842	0.607
Total Assets					1.000	1.000
Debt			0.384	0.121	0.052	0.036
Stock Mkt Part.	0.179	0.543				

Tabel 5: Forventede andele af aktier og risikofri aktiver i forhold til finansiell nettoværdi ifølge data (table 11 i Cocco).

Tabel 5 viser betydningen af finansiell nettoværdi på aktieandelene over likvide og finansielle aktiver. Ifølge denne tabel har gruppen med lav finansiell nettoværdi en lavere aktieandel end gruppen med høj værdi. Dette er det samme resultat som blev forudsagt af modellen i tabel 2. Andelen i dataene er imidlertid noget lavere end i modellen, dog er forskellen større for gruppen med høj nettoværdi.

Ifølge tabel 6 er aktieandelen øgende gennem livet, som forudsagt af modellen. Andelen reduceres noget efter at investor har fyldt 65. Dette kan ses ved at sammenligne tabel 3 og 6. Det kan også ses at betydningen af den faste deltagelsesomkostning i aktiemarkedet er højere for de yngre investorer end dem der er over 50.

Tabel 6 støtter også modellen i det faktum at human kapital er en vigtigere kilde til kapital for de yngre investorer. Dette er årsagen til at fast ejendoms betydning i forhold til totale aktiver øges gennem livet, mens betydningen i forhold til finansielle aktiver synker med investors alder.

Asset	Liquid Assets				Financial Assets				Total Assets			
	< 35	35 – 50	50 – 65	≥ 65	< 35	35 – 50	50 – 65	≥ 65	< 35	35 – 50	50 – 65	≥ 65
Stocks	0.120	0.172	0.178	0.147	0.016	0.032	0.047	0.054	0.002	0.007	0.019	0.029
Cash	0.738	0.655	0.685	0.711	0.051	0.061	0.106	0.150	0.007	0.013	0.037	0.063
Bonds	0.142	0.173	0.137	0.143	0.024	0.031	0.031	0.027	0.004	0.007	0.010	0.011
Liquid Assets	1.000	1.000	1.000	1.000	0.091	0.124	0.184	0.231	0.013	0.027	0.066	0.103
Real Estate					0.732	0.686	0.609	0.597	0.092	0.122	0.164	0.199
Vehicles					0.114	0.096	0.082	0.069	0.013	0.015	0.022	0.022
Other Real Estate					0.024	0.046	0.073	0.073	0.004	0.015	0.033	0.038
Business					0.039	0.048	0.051	0.030	0.016	0.023	0.033	0.019
Financial Assets					1.000	1.000	1.000	1.000	0.138	0.202	0.318	0.381
Human Capital									0.862	0.798	0.682	0.618
Total Assets									1.000	1.000	1.000	1.000
Debt					0.503	0.346	0.145	0.060	0.062	0.057	0.032	0.016
Stock Mkt Part.	0.257	0.344	0.324	0.268								

Tabel 6: Udviklingen af porteføljesammensætning for den likvide formue gennem livet forudsagt af dataene (table 12 i Cocco).

Tabel 7 (se vedlæg 1) viser dataenes forudsagte koefficienter. Der vil som nævnt tidligere, blive lagt vægt på koefficienterne for aktier over likvide aktiver, da disse aktiver er de investor kan allokere mellem aktier og det risikofri aktiv, givet husniveau. Koefficienterne er følgende:

$$(\text{Stocks/LA})_i = -0,257 + 3,43e-06\text{INC}_i + 7,39e-08\text{FNW}_i + 0,002\text{AGE}_i - 0,360\text{REFNW}_i + 0,355\text{MORTFNW}_i - 0,373\text{BUSFNW}_i + \delta_i$$

der BUSFNW = forretningsmidler over finansiell nettoværdi.

Coccos model kan derfor konkluderes med at forklare mønstrene i investorers porteføljesammensætning i forhold til finansiell nettoværdi og alder i tilfredsstillende grad.

Modellen er i tillæg i stand til at forklare koefficienternes fortegn for aktier over totale aktiver og også for aktier i dollar. Imidlertid er der nogle forskelle for aktier over likvide og finansielle aktiver, specielt for fortegnet til den finansielle nettoværdis koefficient.

3.1.6 Modellens begrænsninger

Coccos model har nogle begrænsninger der er værd at nævne. For det første vil det i modellen være omkostningsfrit at ændre sit gældsniveau, og investorer vil derfor aldrig holde både det risikofri aktiv og gæld. Dette er en urealistisk antagelse, da mange investorer i det virkelige liv holder gæld og samtidig har indskud i banken. En forklaring på dette kan være at det i realiteten ikke er omkostningsfrit at justere sit gældsniveau.

For det andet tager modellen ikke med investors forretningsmidler. Modellen forudsiger en højere aktieandel end dataene både for de mere velstående investorer og de investorer med lav finansiell nettoværdi, dog er forskellen meget større for de velstående investorer. Inkludering af forretningsmidler kan derfor føre til at forskellene fra modellen og de observerede data angående de ældre og mere velstående investorer bliver mindre, da forretningsmidlerne vil føre til at likvide midler bliver mindre, samt at arbejdsindkomsten bliver mere korreleret med aktiepriserne, og aktiebeholdningerne forudsagt af modellen vil dermed reduceres.

Modellen antager endvidere en stokastisk proces for huspriserne. I det virkelige liv er det ikke helt så enkelt, og processerne for huspriser viser sig at være meget mere komplekse end antaget af modellen.

Til sidst ignorerer Coccos model skattemæssige virkninger. Dette kan blandt andet påvirke de optimale porteføljeandele via skattefordele forbundet med gæld på den faste ejendom.

Modellen antager også en konstant parameter værdi både for huspræferencen og transaktionsomkostningerne ved at bytte hus hos investorerne. Disse to parametre kan i realiteten variere over livsforløbet.

3.1.7 Konklusion

Modellen forklarer fast ejendoms indflydelse på porteføljekompositionen observeret i virkelige data, samt påvirkningen af velstand på aktiebeholdningen. Ifølge modellen vil fast ejendom holde de likvide aktiver lave i ung alder og for lave værdier af finansiell nettoværdi, og dermed reducere fordelene ved at deltage i aktiemarkedet. Derfor ser man at aktiebeholdningerne til private investorer øges med alder og velstand, i modsætning til det klassiske investeringsråd. Inkludering af fast ejendom i porteføljemodellen løser derfor disse puzzles.

I tillæg forklarer den at risiko i huspriserne reducerer investorers aktiebeholdninger, samt at gæld på fast ejendom og aktiebeholdninger har en positiv sammenhæng.

3.2 *Flavin og Yamashita (1998)*

3.2.1 Problemformulering

Flavin og Yamashita undersøger i sin model fra 1998 hvordan husholdningers optimale porteføljesammensætning påvirkes af ejerskab af fast ejendom, samt gæld på denne. Det forudsættes i undersøgelsen at alle investorer ejer det hus de bor i, og at man vælger allokeringen af sin finansielle kapital givet størrelsen på huset. Denne størrelse forudsættes at reflektere husholdningernes ønskede niveau af huskonsum, og kan derfor afvige fra det som er optimalt at holde investeringsmæssigt set.

Undersøgelsen estimerer afkast og risiko på finansielle aktiver og fast ejendom, og bruger standard middelværdi-varians portefølje teori til at finde husholdningens optimale beholdninger af finansielle aktiver, betinget af deres ejerskab af hus og gæld. Flavin og Yamashita er derfor, i modsætning til Cocco, en statisk analyse der tager husholdningens husejerskab for givet. Den statiske analyse gentages for investorer i alle aldre og genererer dermed en model for hvordan husholdninger skal investere gennem sin livscyklus.

3.2.2 Model

Modellen antager først og fremmest at husholdninger ikke vurderer muligheden til at leje sine boliger, men ejer et hus som svarer til deres ønsker om huskonsum. Dette støttes af gunstige skatteregler for husejere, samt antagelsen om transaktionsomkostninger i forbindelse med at leje.

Flavin og Yamashita ser på hus og gæld som aktiver, og kalkulerer deres risiko ved at estimere deres forventede afkast og kovarianser med finansielle aktiver. Finansielle aktiver er delt op i Treasury bills, langsigtede Treasury obligationer og aktier.

Afkastet på fast ejendom afhænger af flere ting, blandt andet af værdistigning på husets værdi og omkostninger for at eje huset og vedligeholdelse. Lejeværdien på huset samt omkostninger for vedligeholdelse er beskrevet i følgende forhold:

$$D_t = (r + d)P_{t-1} + \text{PropertyTax}_t \quad (18)$$

$$\text{COM}_t = dP_{t-1} + (1-t)\text{PropertyTax}_t \quad (19)$$

der r = den reelle rente, d = deprecieringsraten, P_{t-1} = den reelle husværdi på tidspunkt $t-1$, t = skat på indkomst, og PropertyTax_t = skat på ejendom i periode t . Husets lejeværdi vil dermed være lig med det forrige års værdi på huset, justeret for årets rente og deprecieringsrate, plus ejendomsskat betalt i denne periode. Omkostninger for vedligeholdelse vil være årets værdifald på huset, plus ejendomsskatten for denne periode justeret for $1-t$.

Afkastet på den faste ejendom vil være lig med pris i denne periode plus lejeværdi, med fratæk for omkostninger og forrige periodes pris – alt divideret med forrige periodes pris. Det reelle afkast på den faste ejendom har dermed følgende udtryk:

$$R_t = \frac{P_t + D_t - \text{COM}_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t + rP_{t-1} + t\text{PropertyTax}_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}. \quad (20)$$

Ved at indsætte udtrykkene (18) og (19) i det midterste led i (20), fås udtrykket på højresiden i (20).

Alle afkast på aktiver er benævnt i reelle termer for at inkludere skatte-effekter. Der antages at hverken lejeværdien eller kapitalafkastningsdelen af afkastet er skattepligtig, og R_t er derfor reelt afkast på fast ejendom efter skat.

Der skal også kalkuleres rente på husgæld, og denne skal, som afkast på fast ejendom, være benævnt i reelle termer efter skat. Der antages at investorerne optager et fastforrentet huslån på samme tidspunkt som de køber deres hus, samt at de ikke refinansierer så længe de ejer huset. Da rentebetalinger på gæld kan trækkes fra på skattepligtig indkomst, vil husholdninger betale følgende gældsrente efter skat:

$$\text{Mortgage}_t = \frac{1 + (1-t)\text{Nominal Mortgage}_s}{1 + \text{Inflation}_t} - 1. \quad (21)$$

der Mortgage_t = reel gældsrente efter skat i år t , $\text{Nominal Mortgage}_s$ = den faste rente som lånet blev udstedt med i år s . Det kan ses af (21) at den reelle gældsrente efter skat vil synke med steget inflation og skatteprocent.

Afkastet på Treasury bills er udregnet ved at kalkulere efter skat-afkastet realiseret ved at holde Treasury bills i et år. Der antages at afkastet er beskattet med skatteprocenten for

indkomst. Videre er efter skat-afkastet deflateret sådan at det reelle afkast fremkommer.

Tilsvarende er gjort for Treasury obligationerne.

Afkastet på aktieinvesteringer er tilsvarende omregnet fra nominal til reel værdi. Når det gælder aktier, er dividendeudbetalinger forventet at være skattefrie, mens kursgevinster bliver beskattet.

Alle fem aktiver antages at følge den samme fordeling, uafhængig af område og tidsperiode. De øverste og nederste 2% af hus-afkastene er fjernet, under antagelse af at disse ekstreme værdier skyldes målefejl.

For at undersøge effekten af inkludering af fast ejendom er effisiente grænser kalkuleret for to scenarier:

- (i) Husholdningerne kan kun investere i finansielle aktiver, altså T-bills, Treasury obligationer og aktier. Alle porteføljevægter må være over nul, og husholdninger kan dermed ikke låne til Treasury renten. De kan heller ikke kortsælge aktier.
- (ii) Alle betingelse for scenario (i) holder fortsat. I tillæg kan husholdninger investere i fast ejendom, samt optage et fastforrentet lån på denne. Værdien af lånet kan ikke overstige husets værdi.

Det vil derefter undersøges hvilken effekt inkluderingen af fast ejendom som investeringsobjekt har på husholdningernes effisiente grænse, og hvor meget denne ændres gennem investors liv.

Den optimale portefølje vil som tidligere nævnt ikke ændres i løbet af livscyklusen hvis kun finansielle aktiver inkluderes, og investorerne har konstant risiko aversion. Hvis derimod human kapital og fast ejendom inkluderes, vil ændringerne i afkast og risiko på disse føre til at investors optimale portefølje ændres igennem livsforløbet.

Selv om udleje markeder for fast ejendom eksisterer, og husholdningen dermed kan skille hus-størrelsen og niveauet på de hus-servicer de forbruger fra hinanden, vil skattemæssige fordrejninger og transaktionsomkostninger alligevel føre til at en husholdnings husejerskab er delvis bestemt af deres konsum efterspørgsel for hus-servicer. Et livscyklus mønster i husejerskab og gæld vil dermed give et systematisk livscyklus mønster i beholdningerne af finansielle aktiver. Ejerskabet af fast ejendom på baggrund af behovet for huskonsum vil heller ikke reflektere niveauet af fast ejendom der er optimalt i investeringssammenhæng 100 procent. En husholdnings portefølje vil derfor ofte være inefficent på grund af dette forhold.

Brueckner (1997) viser, at hvis en husholdnings huskonsum overstiger deres optimale hus beholdning set fra et investeringsmæssig synspunkt, vil husholdningen tage hensyn til dette ved at reducere sit konsum på hus-servicer. Modellen vil derfor antage at husholdningen tager dette i betragtning, men ikke at de modellerer sit konsum eksplicit. Dermed tager modellen husholdningens niveau på huskonsum for givet, og karakteriserer de begrænsede, optimale porteføljer på betingelse af deres huskonsum.

Til sidst vil også modellens evne til at forudsige de faktiske data undersøges. Dette vil gøres ved at sammenligne modellens forudsagte aktieandele med de faktiske aktieandele holdt af husholdningerne i udvalget. For at finde aktie- og gældsbeholdninger forudsagt af modellen, bliver forholdet mellem hus-graden h (forventet grad af husværdi over investors aktivers nettoværdi) og de optimale portefølje andele udregnet for forskellige værdier af h . I de tilfælde hvor optimal aktieandel som en funktion af h virker til at være lineær, bliver den forudsagte værdi af aktier over nettoværdi (s) regresseret på h . Resultaterne af denne analyse er beskrevet i afsnit 3.2.4.2.

3.2.3 Data/parameterverdier

Dataene i Flavin og Yamashitas model er hentet fra PSID, og er fra årene 1968 til 1992, altså omtrent den samme periode som i Cocco's model. Da PSID-dataene indebærer subjektive mål på husenes værdi, risikerer Flavin og Yamashita samme problem som Cocco – diskuteret i afsnit 3.1.3 – men det giver også muligheden til at kalkulere den faste ejendoms afkast på husholdningsniveau.

Flavin og Yamashita bruger en kortsigtet rente (r) på 5%. Skatteprocenten benyttet i modellen er på 33%, og inflationen er fundet ved Consumer Price Indexet.

Nominal Mortgage_s findes ved at udregne gennemsnittet på gældsrenter fra de største udlånere i år s .

Modellen bruger S&P 500-indekset på aktier for at finde aktieafkastene. Da modellen antager at skat på dividende er 33% og skat på kursgevinst er 0%, vil modellens efter skat-afkast på aktier sandsynligvis overstige de faktiske afkast.

Reelle efter-skat renter på gæld og afkast på hus er som tidligere nævnt udregnet for hjemme ejere fra PSID-data i tidsperioden 1968 til 1992. Alle husholdninger der var registreret som

husejere i mindst to år indenfor tidsperioden er med i udvalget. Afkast for den faste ejendom er kalkuleret for alle husholdninger ved formel (20), hvis de boede i huset både i periode t og $t-1$. Afkast på fast ejendom afhænger af ændringen i den rapporterede værdi på huset i perioden mellem hvert interview. Disse interview er i modellen sat til at være i marts hvert år.

Afkastene på de finansielle aktiver er udregnet for samme perioder som de faste ejendomme. For T-bills, Treasury obligationer og aktier er dataene hentet fra en længere periode (1926 – 1992).

Middelværdier på afkast, standardafvigelser og kovarians matricen for de fem aktier kan ses i tabel 8. Som forventet har aktier det højeste reelle afkast efter skat på 8,2%, og Treasury bills har det laveste på -0,4%. Det reelle afkast på fast ejendom er 6,6%, og ligger derfor næsten på niveau med aktier. Afkastet på fast ejendom har imidlertid en lavere standardafvigelse end aktier, med 14,24% mod aktiernes 24,15%.

Som det kan ses af tabel 8, har fast ejendom en negativ korrelation med de andre fire aktiver. Dette er forklaret nærmere i afsnit 3.2.4.

	T-Bills	Bonds	Stocks	House	Mortgage
Mean Return (arithmetic)	-.0038	.0060	.0824	.0659	.0000
Standard Deviation	.0435	.0840	.2415	.1424	.0336
Covariance Matrix					
T-Bills	.0018920				
T-Bonds	.0025050	.0070613			
Stocks	.0002008	.0040381	.0583292		
House	-.000119	-.000067	-.000178	.020284	
Mortgage	.0007087	.0023854	.0025400	-.0000057	.0011274
Correlation Matrix					
T- Bills	1.0000				
T- Bonds	.68533	1.0000			
Stocks	.01912	.19897	1.0000		
House	-.03339	-.004506	-.000771	1.0000	
Mortgage	.84119	.680286	.467954	-.001192	1.0000

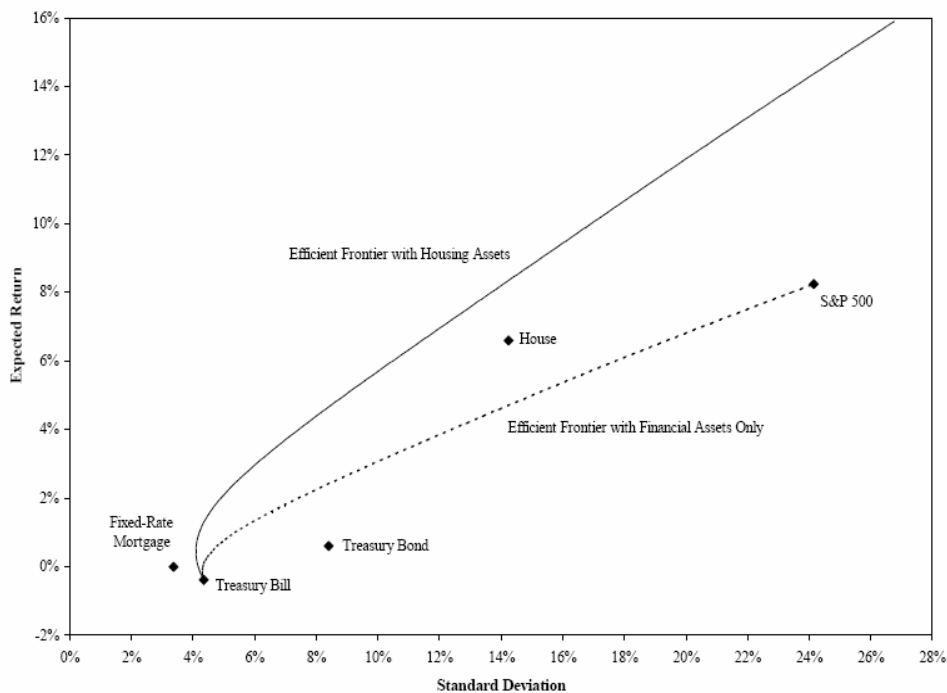
Tabel 8: Forventede afkast og kovarians matrice for de fem aktiver (table 1 i Flavin og Yamashita).

3.2.4 Resultater

Siden fast ejendom er ukorreleret med de finansielle aktiver, vil denne type aktiv være et godt hedge mod værdiændringer i finansielle aktiver, og er i overensstemmelse med fund gjort af

Goetzmann (1993). Dette vises i figur 1, hvor den effisiente grænse er tegnet både for husholdninger der kun holder finansielle aktiver, samt de der i tillæg ejer fast ejendom. Som det kan ses af figur 1, forbedres den effisiente grænse dramatisk når fast ejendom inkluderes. En portefølje med standardafvigelse på 15% giver for eksempel et afkast på 5% uden fast ejendom, men dette afkast øger til 8,8%, samtidig som risikoen holder sig konstant, hvis den faste ejendom inkluderes.

Figuren viser også at bortset fra meget lave afkast og risici vil fast ejendom udgøre en stor del af den optimale portefølje.



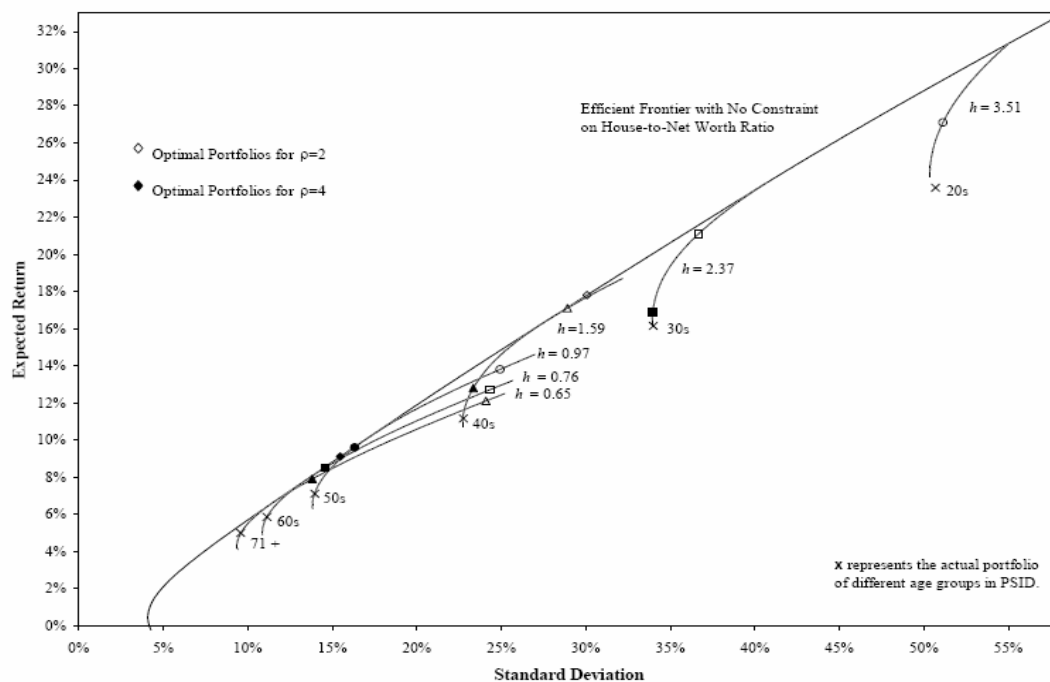
Figur 1: Effisiente grænse med og uden fast ejendom som aktiv (figure 1 i Flavin og Yamashita).

3.2.4.1 Livscyklusmønstre forudsagt af modellen

Age of Head	Cash	Bonds	Stocks	House	Mortgage	μ	σ
18 - 30	0.193	0.072	0.056	3.511	-2.833	0.236	0.507
31 - 40	0.169	0.067	0.068	2.366	-1.671	0.161	0.340
41 - 50	0.148	0.060	0.085	1.588	-0.882	0.112	0.227
51 - 60	0.200	0.058	0.092	0.969	-0.319	0.071	0.140
61 - 70	0.254	0.048	0.113	0.757	-0.171	0.059	0.111
71 +	0.264	0.029	0.098	0.648	-0.038	0.050	0.097

Tabel 9: Livscyklus mønstre for beholdning af aktiver for husholdninger i PSID data (table 2 i Flavin og Yamashita).

Tabel 9 viser middelværdien af aktiver over nettoværdi for investorer i forskellige aldersgrupper, hentet fra PSID-dataene. Forventet afkast og risiko for hver gruppes portefølje er også rapporteret i tabellen. Det kan ses af tabellen at i aldersgruppen 18-30 vil h være lig med 3,51, mens den i aldersgruppen 31-40 vil være lig med 2,37, etc... Kvadratisk programmering er derefter blevet brugt til at finde den begrænsede effisiente grænse associeret med de forskellige værdier af h . Betingelserne om ikke-negative aktivandele, kun gæld på fast ejendom og at gælden ikke kan overstige husets værdi er blevet brugt. Som det kan ses af tabel 9, vil de yngste husholdninger have det højeste forventede afkast, men også den højeste risiko.



Figur 2: Effisiente grænser for de forskellige aldersgrupper med investering i hus holdt fast (figure 2 i Flavin og Yamashita).

Dette fund vises også i figur 2. Denne figur viser de begrænsede effisiente grænser for de forskellige aldersgrupper, samt den ubegrænsede grænse (den effisiente grænse uden den fastholdte investering i fast ejendom), og beviser at investering i fast ejendom har en enorm effekt på husholdningens tradeoff mellem risiko og afkast. De yngste investorer med $h = 3,51$ ligger længst oppe til højre i figuren, og for denne gruppe vil porteføljen med lavest risiko have et forventet afkast på 24%, samt en standardafvigelse på over 50%. Eftersom husholdningerne bliver ældre og sparer mere op, og oplever en højere finansiell velstand, falder værdien af h (værdien af den faste ejendom bliver mindre vigtig i forhold til den finansielle formue), og den effisiente grænse bevæger sig mod venstre i figuren.

Det kan ses af figur 2 at investorerne er nødt til at komme op i en alder af 50, 60 og 70 at den begrænsede grænse nærmer sig den ubegrænsede. Dette kan forklares med at når investorerne når en så høj alder vil deres husværdi være faldet i forhold til deres finansielle formue, og h bliver meget lav. Den faste ejendoms vigtighed i forhold til de finansielle midler vil dermed være meget mindre end for de unge investorer.

Figur 2 viser også de begrænsede optimale porteføljer for en relativ risiko aversion (ρ) på 2 og 4. Det er åbenlyst at for en givet grænse, vil en investor med en risiko aversion på 2 holde en meget mere risikabel portefølje end en investor med en risiko aversion på 4. Alligevel, på grund af investeringen i fast ejendom, vil en investor på 20 år og med en risiko aversion på 4 holde en mere risikabel portefølje end en investor på 70 år med en risiko aversion på 2.

Ved at bruge PSID dataene for de forskellige aldersgrupper fra tabel 9, viser figur 2 også de faktiske porteføljer for hver aldersgruppe, noteret med x. I alle aldersgrupper bliver det holdt en portefølje med et lavere afkast end den optimale portefølje kalkuleret af modellen.

Alligevel har modellen forudsagt de faktiske porteføljer på en tilfredsstillende måde, under antagelse at investorenes risiko aversion ligger på 4⁷.

Læg mærke til at den begrænsede grænse ikke nødvendigvis er tangerende med den ubegrænsede grænse, i modsætning til i andre modeller (for eksempel Brueckner (1997)). I Flavin og Yamashitas model har husholdningen en gældsrestriktion som siger at værdien på gæld ikke kan overstige værdien på investors hus, og denne restriktion er ofte bindende. Se for eksempel på tilfældet med $h = 3,51$. Husholdningen med denne værdi på h holder langs hele den begrænsede grænse en gæld på samme værdi som husets værdi. Samtidig holder disse investorer et beløb lig med deres nettoværdi, i en kombination af aktier og obligationer. Eftersom husholdningerne bevæger sig langs den begrænsede grænse mod mere risikable porteføljer som en følge af at risiko aversionen reduceres, reduceres andelen i obligationer, samtidig som aktieandelene øges. Samtidig beholdes hus og gæld i samme beløb.

På det tidspunkt hvor porteføljen består af $h = 3,51$, gæld = -3,51, aktier = 1, obligationer = 0 og T-bills = 0, har husholdningen nået sit højeste forventede afkast med en h på 3,51, siden de ikke kan optage mere gæld på deres hus. For at bevæge sig yderligere langs den ubegrænsede

⁷ En relativ risiko aversion på 4 er, ifølge Flavin og Yamashitas node nr 6, konsistent med andre studier baseret på CAPM og finansielle data. Blandt andet konkluderer Grossman og Shiller (1981) med at en risiko aversion på 4 er den rigtige for at generere de historiske mønstre i aktiekursbevægelser.

grænse ville husholdningen dermed have holdt sine andele i finansielle aktiver konstant, samtidig med at have øget værdien på deres faste ejendom, og fortsat optaget gæld i samme værdi som huset. Dette er ikke muligt på den begrænsede. I krydsningen mellem den ubegrænsede og begrænsede grænse vil hældningen dermed på den begrænsede reflektere ændringen i tradeoff'et på risiko og afkast som en følge af justeringen af andele i obligationer og aktier. I modsætning vil hældningen på den ubegrænsede reflektere ændringen i tradeoff'et på risiko og afkast som en følge af køb af et større hus med tilsvarende gæld, samtidig med at aktieandelen holdes på 1.

Housing-to-NW Ratio	Assets in Portfolio	Coefficient of Relative Risk Aversion (ρ)			
		$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$	$\rho = 4$
Financial Assets Only	Treasury Bills	0	0	0.2425	0.4618
	Treasury Bonds	0	0.2669	0.2681	0.1580
	Stocks	1	0.7331	0.4894	0.3802
	Mortgage	0	0	0	0
3.51	Treasury Bills	0	0	0	0
	Treasury Bonds	0	0.5605	0.9143	Not Attainable*
	Stocks	1	0.4395	0.0857	
	House	3.51	3.51	3.51	
2.37	Treasury Bills	0	0	0	0
	Treasury Bonds	0	0.3622	0.7026	0.6190
	Stocks	1	0.6378	0.2974	0.1093
	Mortgage	-2.37	-2.37	-2.37	-2.0983
1.59	Treasury Bills	0	0	0	0
	Treasury Bonds	0	0.2125	0.5660	0.4914
	Stocks	1	0.7875	0.4340	0.2452
	Mortgage	-1.59	-1.59	-1.59	-1.3269
0.97	Treasury Bills	0	0	0	0
	Treasury Bonds	0	0.1093	0.4628	0.3978
	Stocks	1	0.8907	0.5372	0.3599
	Mortgage	-0.97	-0.97	-0.97	-0.7277
0.76	Treasury Bills	0	0	0	0
	Treasury Bonds	0	0.0720	0.4255	0.3640
	Stocks	1	0.9280	0.5745	0.3969
	Mortgage	-0.76	-0.76	-0.76	-0.4070
0.65	Treasury Bills	0	0	0	0
	Treasury Bonds	0	0.0556	0.3960	0.3434
	Stocks	1	0.9444	0.6040	0.4136
	Mortgage	-0.65	-0.65	-0.65	-0.4070
No Constraint on h	Treasury Bills	0	0	0	0
	Treasury Bonds	0	0.2431	0.4933	0.3825
	Stocks	1	0.7569	0.5067	0.3768
	Mortgage	3.6490	1.7317	1.1570	0.8744
		-3.6490	-1.7317	-1.1570	-0.6337

Tabel 10: Portefølje vægte for forskellige begrænsninger på h (table 3 i Flavin og Yamashita).

Tabel 10 viser de optimale porteføljevægte for forskellige grader af risiko aversion når den effisiente grænse er estimeret med (a) kun finansielle aktiver, (b) forskellige værdier af h for de forskellige aldersgrupper, og (c) ingen begrænsning på h . Tabellen viser at for alle disse tre kategorier vil investor holde 100% aktier hvis han/hun har en risiko aversion på 1. Dermed vil ingen af disse grupper vil holde obligationer eller T-bills. I tillæg vil alle disse grupper, bortset fra gruppe a), der ikke har fast ejendom, holde gæld i samme værdi som deres hus. Dette gælder også for andre investorer med en risiko aversion op til og med 3. Det er derfor kun de investorer der er meget risiko averse som vil holde en gæld i mindre værdi end deres hus.

For en risiko aversion over 1 vil aktieandelen varieres afhængig af h . Det kan ses af tabellen at eftersom h synker, og investors alder typisk vil øge, vil aktieandelen stige, og andelen obligationer vil synke. For eksempel vil en investor med risiko aversion på 2 holde en aktieandel på 0,44 når h er 3,51 og han er ung, mens denne andel vil være steget til 0,94 når h er reduceret til 0,65. For øget risiko aversion, alt andet lige, vil aktieandelen selvfølgelig synke, mens obligationsandelen stiger.

Tabellen viser også at bortset fra de investorer der kun har finansielle aktiver og en risiko aversion på 3 eller 4, vil ingen husholdninger holde T-bills.

Det kan også ses af tabel 10 at de fleste husholdninger holder både obligationer og gæld på deres hus. Da disse to er lignende aktiver, kunne de teoretisk set være blevet slået sammen i modellen, sådan at denne post ville være positiv hvis husholdningen holdt flere obligationer end gæld, og modsat. Dette ville ikke have påvirket aktieandelene særlig meget. Man kunne så selvfølgelig ikke have sagt noget om hvor meget husholdningen holdt i gæld og obligationer hver for sig.

3.2.4.2 Modellens forudsigende egenskaber

Som nævnt i afsnit 3.2.2, bruger modellen PSID data og OLS regressioner til at finde husholdningernes aktiebeholdninger som en funktion af deres husværdi over nettoværdi (h), forudsagt af modellen. Tabel 11 viser resultaterne af denne analyse. I denne tabel er det, som der kan ses, ikke inkluderet en risiko aversion på 1. Denne grad af risiko aversion vil, uanset h , føre til en optimal portefølje med kun aktier, i tillæg til samme værdi i gæld som for hus. For en risiko aversion på 2, 3 eller 4 kan det ses at OLS regressionerne i tabel 11 at alle har en R^2 nær 1. Dette betyder at regressionerne forklarer udvalgets dataer næsten perfekt.

	<u>Coefficient of Relative Risk Aversion</u>		
	$\rho \approx 2$	$\rho \approx 3$	$\rho \approx 4$
Constant	1.0653 (.00215)	0.7151 (.00178)	0.5383 (.00176)
h	-0.1780 (.00098)	-0.1782 (.00118)	-0.1812 (.00121)
Sample Size	14	14	14
R^2	.9996	.9994	.9994

Note: standard errors in parenthesis

Tabel 11: Regression af porteføljevægte af aktier i den optimale portefølje (table 4 i Flavin og Yamashita).

Hældningskoefficienterne er rundt -0,18 i alle tre regressioner. Dette betyder at hvis h reduceres med 10%, vil aktieandelen øges med ca 1,8%. Forholdet mellem h og s er kun lineært i de intervaller hvor h og s ikke er nul.

Regressionerne bliver i analysen også sammenlignet med de data der er samlet ind fra PSID fra 1989. I figur 3a) til 3f) (se vedlæg 1) er både aktier over nettoværdi og gæld over nettoværdi plottet for alle aldersgrupper, og grader af risiko aversion (2, 3 og 4), både for de virkelige data (+’er og x’er) og modellens forudsigelser (linjer). Det kan ses af figur a) at investorer i aldersgruppen 18 til 30 som regel holder en aktieandel på nul. Dette er nøjagtig hvad modellen forudsiger for en risiko aversion på 4, for de investorer der har en h over 2,97. Hvis investorenes risiko aversion er under 4, vil de husholdninger med en h under 2,97 ifølge modellen holde en positiv aktieandel, inkonsistent med hvad de virkelige data for investorer med en risikoaversion under 4 og h under 2,97 i figur 3 viser. Dataenes resultater er derimod meget godt i tråd med modellens anbefalinger for risiko aversion 2-4 hvis det kun ses på husholdninger med en aktiebeholdning over nul.

Plots for andre aldersgrupper kan ses i figur 3b) til 3f). Disse viser at plottene bliver mere koncentreret rundt lave værdier af h eftersom investor ældes, selv om forholdet mellem s og h er uafhængig af alder. Ifølge modellen bør investorer med en risiko aversion på 2 eller 3 holde et 100% lån uanset hvor lav h bliver, for at kunne investere i aktiver med et højere afkast. Dette er inkonsistent med dataene fra PSID. For eksempel kan det ses af figur 3f) at 86,7% af alle investorer over 71 år ikke har gæld på sit hus. Dette fører til at modellen også forudsiger en højere aktieandel end man kan se i de virkelige data.

	$h_{89} \leq \tilde{H}$	$h_{89} > \tilde{H}$
$h_{84} \leq \tilde{H}$	Constant = 0 Slope \approx -0.18	Constant = positive Slope \approx Negative, but smaller than -0.18 in absolute value.
$h_{84} > \tilde{H}$	Constant = positive Slope \approx Negative, but smaller than -0.18 in absolute value.	Constant \approx 0 Slope \approx 0

Tabel 12: Implikationer af ændring i husværdi fra 1984 til 1989 på regressionskoefficienter (table 5 i Flavin og Yamashita).

Flavin og Yamashita har i tillæg undersøgt hvad der sker med investorenes aktiebeholdninger fra 1984 og 1989. Dette afhænger af om deres husværdi over nettoværdi (h) overstiger en vis værdi H . Tabel 12 viser resultaterne af denne analyse. Ifølge tabellen skal investorenes ændring i aktieandel mellem de to perioder kun være nul i det tilfælde hvor h er over H i begge perioder. Tabel 13 (se vedlæg 1) viser ændringerne i porteføljevægte for husholdningerne i PSID dataene mellem 1984 og 1989, afhængig af h . Denne tabel bruger en værdi af H på 2,97, som er fundet ved at bruge en risiko aversion på 4. Man kan se af tabellen at næsten 88% af husholdningerne har en h under 2,97 i begge perioder, og ifølge modellen skal de derfor holde en positiv aktieandel i begge perioder. Ifølge tabel 12 skal denne gruppes ændring i aktieandel være større eller mindre end nul. Alligevel kan man se af tabel 13 at 43,2% (100-56,8) har en $\Delta s_t = 0$. Samtidig forudsiger modellen at investorer med h over 2,97 i begge perioder skal have en ændring i s på nul, mens dataene viser at 59% af investorerne har en ændring i s fra 1984 til 1989. For at sikre konsistens med de andre regressioner er kun observationer med værdier på s over eller under nul brugt i mindst et af årene for begge grupper.

Regressionsresultaterne vises i tabel 14 (se vedlæg 1). Hældningskoefficienten er -0,103 hvis forholdet mellem ændring i s og ændring i h er lineært for alle værdier af ændring i h . Dette er noget mindre end -0,18 - den forudsagte værdi for observationerne der h var mindre end 2,97 i begge år. Hældningskoefficienten er negativ for de observationer hvor h krydset grænsen H , men mindre end den absolutte værdi end 0,18, og statistisk insignifikant. Det konstante led er statistisk signifikant og positivt, og dette er derfor konsistent med modellen. Til sidst er hældningskoefficienten forskellig fra nul - både numerisk og statistisk insignifikant - for observationerne der h er over 2,97 i begge år, og det konstante led er positivt, men statistisk insignifikant. Dette er konsistent med modellen.

3.2.5 Konklusion

Flavin og Yamashita finder, baseret på data fra PSID, at inkludering af fast ejendom som et aktiv for investorerne i undersøgelsen dramatisk forbedrer den ubegrænsede effisiente grænse. Dette bekræfter at fast ejendom er en god investering for husholdninger. Når husholdningernes faste ejendom derimod tages for givet på grund af deres konsumefterspørgsel efter hus-servicer, placeres en begrænsning på husholdningens portefølje

problem. Denne begrænsning i porteføljeprøbet fører til et dramatisk livscyklus mønster i investorernes optimale porteføljer.

Kort fortalt er resultatet af livscyklus analysen af modellen at yngre husholdninger har en høj værdi på deres hus i forhold til deres finansielle formue, og dermed en høj risiko. De reducerer derfor sin risiko i sin portefølje af aktier og obligationer. Dette gøres ved at holde en lavere andel aktier, samtidig med at de enten betaler ned på deres lån eller holder flere obligationer. Eftersom de bliver ældre og får en lavere husværdi i forhold til finansiell formue, øger de risikoen på deres finansielle portefølje ved at øge aktieandelen og reducere andelen af obligationer. Aktieandelen stiger derfor med alderen på grund af investeringen i fast ejendom. Selv om analysen forklarer hvorfor nogle husholdninger holder meget lave aktieandele, forklarer den ikke hvorfor nogle husholdninger vælger at holde obligationer i stedet for at betale ned på deres lån. En forklaring på dette kan være høje transaktionsomkostninger for at refinansiere et lån, eller gunstige skatteregler for at holde gæld.

Undersøgelsen viser derfor at husholdninger, der er identiske på alle punkter bortset fra værdi i fast ejendom, vil holde meget forskellige porteføljeandele, på grund af deres forskellige værdier i fast ejendom. En husholdning med en lav værdi af hus over nettoværdi (typisk ældre investorer) vil, alt andet lige, holde en meget højere aktieandel end en husholdning med en høj værdi af hus over nettoværdi (typisk yngre investorer). Dette forklarer det at husholdninger generelt set investerer i modsætning til det klassiske investeringsråd – at man skal holde en lavere andel aktier eftersom man ældes.

3.2.6 Modellens svagheder

Modellen gør det rimeligt godt i at forklare husholdningernes aktie- og obligationsandele. Alligevel er der forhold den ikke kan forklare, for eksempel den høje andel af investorer der ikke har aktier eller gæld på deres faste ejendom. Modellen tager også investors hus for givet, selv om husholdningerne i nogle tilfælde kan justere deres niveau på hus efter hvad som er optimalt for deres porteføljevalg. Samtidig er det en begrænsning for modellen at den antager korrelationer, afkast og standardafvigelser der er konstante over tid. Modellen er derfor en statisk model der kun giver delvis ligevægt.

Man kan imidlertid tage diskussionen videre og spekulere i hvilke følger det vil få om man antager at h er relateret til alder. Man kan dermed for eksempel tænke sig at i en periode med baby-boom vil det følge en periode med høje priser på fast ejendom.

3.3 Yao og Zhang (2005)

3.3.1 Problemformulering

Yao og Zhang peger i deres undersøgelse på hvor vigtig fast ejendom er i investors portefølje, på grund af den dobbelte hensigt ved at eje et hus – konsumhensigten og investeringshensigten. I tillæg udgør fast ejendom ca 55% af en hjemme ejsers aktiver⁸, noget der gør inkludering af denne faste ejendom i porteføljeanalysen desto vigtigere. Yao og Zhang undersøger, på grundlag af dette, i deres dynamiske model hvilken portefølje der er optimal for familier med hus, hvad enten de lejer eller ejer. Denne model tager derfor et skridt videre i forhold til Cocco (2000) og Flavin og Yamashita (1998), som kun tager hensyn til husholdninger der ejer et hus. Dette forhold gør at Yao og Zhang kan skille investors huskonsum valg fra hans/hendes investerings valg.

Modellen undersøger også hvilken nytteomkostning og bias i porteføljen to sub-optimale strategier medfører: a) Kun at leje bolig, eller b) Kun at eje bolig.

Undersøgelsen indeholder også en dybtgående empirisk analyse som forsøger at bestemme determinanterne i lejetageres og husejeres porteføljeproblem. Her fokuserer Yao og Zhang på husholdningernes aktieinvestering som en andel af enten husholdningens nettoværdi eller dens likvide aktivbeholdning. De undersøger hvordan aktieinvesteringen påvirkes af variable fra den teoretiske analyse – valg af hus, husværdi/nettoværdi, alder, nettoværdi/indkomst og andre variable der kan tænkes at påvirke porteføljeallokeringen.

Undersøgelsen omfatter også en simulationsanalyse, hvor resultaterne kan ses i tabel 16 (se vedlæg 1).

3.3.2 Model

Som i de fleste andre porteføljemodeller, antager Yao og Zhang at investor lever i T perioder, hvor alle perioder $t \leq T$. Investors sandsynlighed for at leve til periode t (λ_t) er produktet af sandsynlighederne for at leve frem til alle perioderne indtil periode t .

⁸ 2001 Survey of Consumer Finances – Yao/Zhang, 2005, side 1.

I modellen kan investor skaffe sig nytte på to måder: konsumere hus services (H_t) eller andre varer (C_t). Investor modtager også en indkomst i hver periode, der repræsenterer arbejdsindkomsten indtil investor bliver pensioneret ved periode J (alder 65). Den reelle vækstrate på Y_t består af både en deterministisk funktion ($f(t)$), der afhænger af investors alder, samt et tilfældig sjok i indkomstvæksten (ϵ_t). Funktionen for arbejdsindkomst ser dermed sådan ud:

$$\Delta \log Y_t = f(t) + \epsilon_t, \text{ for } t = 0, \dots, J - 1. \quad (22)$$

Fra og med periode J vil Y_t repræsentere investors pensionsindkomst. Denne er benævnt som en fast andel (θ) af investors arbejdsindkomst på tidspunkt $J - 1$.

Ejer investor sin bolig, tilfredsstiller dette investors behov både for konsum og investering i fast ejendom. Siden Yao og Zhang lader investor skaffe sin bolig ved enten at leje eller eje, kan investor, ved at leje sin bolig, skille sit konsumproblem fra sit investeringsproblem, og undgår desuden det meste af risikoen på fast ejendom. Investor kan i hver periode vælge om han vil fortsætte med at eje/leje, eller skifte til leje/eje. Skifter investor boligtype (leje/eje), tager et eksogent flyttesjok (D_t^m) værdien 1, og 0 hvis han fortsætter som før.

Husets markedsværdi er $P_t^H H_t$, hvor P_t^H = pris per husenhed og H_t = antal husenheder, alt på tidspunkt t . For at leje betaler investor en andel α af denne værdi, og for at eje betaler han mindst en andel δ af husets markedsværdi som en nedbetaling, og finansierer resten med et lån. I hver periode investor ejer sin bolig, betaler han en andel ψ af husets markedsværdi som vedligeholdelseskostninger. Hvis investor ønsker at sælge sit hus, betaler han en andel ϕ af husets markedsværdi i likvideringskostninger. En lejer kan derimod bytte bolig uden omkostninger.

Det reelle afkast på fast ejendom (R_t^H) kan være korreleret med aktieafkast eller arbejdsindkomstens vækst, og antages at følge en stokastisk proces.

Følgende finansielle aktiver er tilgængelige for investor: Det risikable (S_t) og det risikofri (B_t), hvor det risikable aktiv har et reelt afkast på R_t , og det risikofrie har et afkast på R_f . R_f antages at være konstant over tid, mens R_t følger en stokastisk proces. Der eksisterer ingen transaktionsomkostninger ved at handle disse aktiver, og kortsalg af det risikable aktiv er ikke tilladt. Investor kan kun låne til den risikofrie rente hvis han tager pant i sit hus, og det antages

at hans gældsrente efter skat er den samme som den risikofri rente efter skat. M_t er investors gæld på tidspunkt t , og niveauet på denne kan refinansieres uden omkostninger i hver periode t . Siden M_t ikke kan være højere end husets værdi minus den nedbetaling der betales på tidspunkt for køb af huset, vil investors beholdning af aktiver ha disse restriktioner:

$$B_t \geq 0 \quad \text{og} \quad 0 \leq M_t \leq D_t^0(1 - \delta)P_t^H H_t, \quad \text{for } t = 0, \dots, T - 1 \quad (23)$$

der $1 - \delta =$ den maksimale andel af husets værdi som kan lånes, og $D_t^0 =$ "ejerdummy'en" som tager værdi 1 hvis investor ejer sit hus, og nul i modsat fald. Denne sikrer at investor ikke kan have gæld hvis han ikke ejer et hus.

Investor antages at have et arvemotiv, det vil sige at hans likviderede formue i periode T bliver brugt til at købe en L -periodes annuitet til hans arvemodtagere, som kan bruges til at betale for deres huskonsum og andet konsum.

Med disse forhold taget i betragtning, bliver investors problem at maksimere hans diskonterede, forventede nytte af både huskonsum, andet konsum samt hans efterladte arv, alt på betingelse af hans budgetrestriktioner, givet hans beholdninger af aktiver. Følgende forhold beskriver problemet på tidspunkt $t = 0$:

$$\max_{A(t)} E \left\{ \sum_{t=0}^T \beta^t [F(t)u(C_t, H_t) + [F(t-1) - F(t)]B(Q_t)] \right\} \\ A(t) = \{C_t, H_t, B_t, S_t, D_t^o, D_t^s\}, \quad t = 0, \dots, T-1 \quad (24)$$

s.t.

$$W_t = B_{t-1}R_f + S_{t-1}\tilde{R}_t^S + D_{t-1}^o P_{t-1}^H H_{t-1} [\tilde{R}_t^H (1 - \phi) - (1 - \delta)R_f], \quad (25)$$

$$Q_t = W_t + Y_t, \quad (26)$$

$$Q_t = C_t + B_t + S_t + (1 - D_{t-1}^o) [(1 - D_t^o)\alpha(P_t^H H_t) + D_t^o(\psi + \delta)(P_t^H H_t)] \\ + D_{t-1}^o [D_t^m + (1 - D_t^m)D_t^s] [(1 - D_t^o)\alpha(P_t^H H_t) + D_t^o(\psi + \delta)(P_t^H H_t)] \\ + D_{t-1}^o (1 - D_t^m)(1 - D_t^s) [(\psi + \delta - \phi)(P_t^H H_{t-1})], \quad (27)$$

$$Y_{t+1} = Y_t \exp\{f(t+1) + \epsilon_{t+1}\}, \quad (28)$$

$$C_t > 0, \quad H_t > 0, \quad B_t \geq 0, \quad S_t \geq 0, \quad (29)$$

givet initialværdi på for statusværdi på ejerskab af hus, realisering af eksogent flyttesjok (D^m_0), nettoværdi før arbejdsindkomst, arbejdsindkomst, huspris og antal husenheder ejet af investor. Investor maksimerer (24) på betingelse af (25) – (29).

Af (24) ses det at investor maksimerer sin diskonterede nyttefunktion ved at bestemme niveauer på huskonsum, andet konsum, arv og aktiebeholdning, samt bestemme om han skal eje hus eller ikke, og om han skal sælge sit hus hvis han ejer (D^s_t). $F(t)u(C_t, H_t)$ vil være lig med nytte af hus- og andet konsum, og er justeret for sandsynligheden at investor lever til periode t . $[F(t-1) - F(t)]B(Q_t) =$ nytten af efterladt arv, og er tilsvarende justeret for sandsynligheden for at investor dør i periode t .

(25) beskriver investors nettoværdi på tidspunkt t , og består af sidste års beholdning af aktier og obligationer, plus årets afkast på disse. I tillæg vil W_t indeholde årets afkast for investors faste ejendom. Denne vil bestå af sidste års værdi ($P^H_{t-1}H_{t-1}$) samt årets afkast minus eventuelle likvideringsomkostninger og gældsrente fratrukket eventuel nedbetaling.

I (26) vises investors totale resurser tilgængelige på tidspunkt t , og vil være lig med summen af finansiell nettoværdi og periodens arbejdsindkomst. Videre beskriver (27) budgetbetingelsen i periode t . Denne vil være summen af andet konsum, obligations- og aktiebeholdninger. Samtidig vil (27) afhænge af investors ejerskab af fast ejendom. Hvis han ikke ejede fast ejendom i $t-1$ vil det første led efter S_t gøres gældende. Dette siger at hvis han heller ikke ejer i år, vil årets lejeomkostninger i procent af husets værdi lægges til hans brug af penge, mens hvis han har købt et hus i år, vil nedbetaling og vedligeholdelsesomkostninger som procent af husets værdi lægges til.

Videre gøres de to sidste led gældende hvis investor ejede fast ejendom i periode $t-1$. Det første af disse to gøres gældende hvis investor oplever et eksogent flyttechok eller sælger sit hus i periode t . Her vil det tilsvarende forrige led lægges til lejeomkostninger hvis han lejer i periode t , mens vedligeholdelsesomkostninger og nedbetaling lægges til hvis han også ejer i periode t .

Det sidste led i (27) vil gælde hvis han hverken oplever et eksogent flyttechok eller sælger, og $(1-D^m_t)(1-D^s_t)$ vil da være lig med 1. I dette tilfælde vil omkostninger for vedligehold og nedbetaling, fratrukket eventuelle likvideringsomkostninger, som en procent af værdi på huset (med sidste års husniveau) lægges til årets forbrug af finansielle midler.

(28) forklarer næste års arbejdsindkomst, som vil være lig med årets arbejdsindkomst, plus forventningen til næste års lønstigning som en følge af investors ændrede alder, samt et tilfældigt fejllid.

Investors nyttefunktion forventes at være beskrevet ved Cobb-Douglas nyttefunktionen. Her vil investor forbruge hus-servicer og andre forbrugsvarer afhængig af hans vigtighed af hus over andet konsum (ω), og risiko aversion (γ). Investors nytte forklares dermed ved følgende forhold:

$$u(C_t, H_t) = \frac{(C_t^{1-\omega} H_t^\omega)^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \quad (30)$$

I en en-periode model vil en investor med denne nytte forbruge en fast proportion af disse to varer. Dette holder også for en flerperiode model så længe investor lejer sin bolig, fordi lejemarkedet sørger for at eliminere ejerskab af hus som en valgt variabel når investor lejer hus. Hvis lejerskab altid dominerer ejerskab og huspriserne er ikke-stokastiske, vil problemet i Yao og Zhang reduceres til portefølje problemet som vi allerede kender det, med human kapital og en enkelt forbrugsvarer. Hvis ejerskab derimod er optimalt mindst en gang i investors liv, vil likvideringsomkostninger og lånebegrensninger sørge for at investors konsum på forbrugsvarer ikke er en fast andel af huskonsum. Værdien på den faste ejendom vil dermed blive en del af investors portefølje problem.

Investors arvefunktion ($B(Q_t)$) kan ses på side 205 i Yao og Zhang ((11)).

Investors værdifunktion kan skrives på følgende måde:

$$V_t(X_t) = \max_{A(t)} \left\{ \lambda_t \left[\frac{(C_t^{1-\omega} H_t^\omega)^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \beta E_t[V_{t+1}(X_{t+1})] \right] \right. \\ \left. + (1-\lambda_t) \frac{\beta(1-\beta^L)[A_L Q_t \omega^\omega (1-\omega)^{1-\omega}]^{1-\gamma}}{(1-\beta)(1-\gamma)(\alpha P_t^H)^\omega (1-\gamma)} \right\} \quad (31)$$

$$A_t = \{C_t, H_t, B_t, S_t, D_t^o, D_t^s\}, \quad t = 0, \dots, T-1$$

(31) beskriver investors værdi af at forbruge og investere gennem hele hans liv. Som det kan ses af (31) vil investor forsøge at maksimere denne værdi, ved selv at vælge konsum af hus og andet, beløb i obligationer og aktier, samt om han vil eje/leje, og om han vil sælge. Værdien

vil bestå af hans nytte af forbrug i periode t samt den diskonterede, forventede værdi for næste periode, justeret for sandsynligheden for at overleve periode t . I tillæg vil værdien også indeholde værdien af hans efterladte arv, justeret for sandsynligheden for at dø i periode t . X_t i (31) er en vektor bestående af hjemme ejerskabs dummyen, flytteschok dummyen, pris per enhed af hus-servicer, størrelse på eksisterende hus, og investors niveau på arbejdsindkomst og nettoværdi – $X_t \equiv \{D_{t-1}^0, D_t^m, P_t^H, H_{t-1}, Y_t, W_t\}$.

Investors optimeringsproblem kan blive simplificeret ved at bruge investors velstand Q_t som en normaliseringsvariabel. Dette kan ses nærmere i appendikset i Yao og Zhang.

Modellen i den empiriske analyse påvirkes af det faktum at en stor del af husholdningerne ikke holder aktier. Det findes ingen veldokumenterede metoder for at løse dette problem for ikke-lineære panel data modeller, og disse individ-specifikke effekter kan derfor resultere i biased og inkonsistente estimater for parametrene.

Yao og Zhang bruger Kyriazidou's to-skridts metode i analysen. Det første skridt indebærer at koefficienterne i aktiemarkedsdeltagelsesformelen estimeres. Så bruges disse estimater til at konstruere porteføljeandels-formelen. Følgende er gældende:

$$y_{it}^* = x_{it}'\beta + \alpha_i + \epsilon_{it}, \quad (32)$$

$$d_{it} = 1\{z_{it}'\gamma + \eta_i - u_{it}\}, \quad (33)$$

$$y_{it} = d_{it}y_{it}^*, \quad (34)$$

Hvor y_{it}^* = den individuelle ønskede aktiebeholdning på tidspunkt t , x_{it} og z_{it} = vektorer af forklarende variabler med mulige fælles elementer, og d_{it} = en indikator funktion der tager værdi 1 hvis investoren ejer aktier på tidspunkt t , og 0 ellers. α_i og η_i er uobserverede, konstante, individ-specifikke effekter i henholdsvis aktieandelsformelen og aktiemarkedsdeltagelsesformelen. Både α_i og η_i kan være korreleret med x_{it} eller z_{it} . ϵ_{it} og u_{it} er uobserverede forstyrrelser, som også kan være korrelerede med hinanden. Den ønskede aktieandel er kun tilgængelig når investor deltager i aktiemarkedet.

(32) viser derfor at investors ønskede aktieandel afhænger af forklarende variabler som indkomst, hus, etc., individspecifikke effekter som ikke kan observeres, samt et fejllid. Af (33) kan man se at værdien på den binære variabel d afhænger af de samme variabler. Til slut

forklarer (34) at investors aktieandel er nul hvis hans d-værdi er nul, uafhængig af hans ønskede beholdning, mens den vil være lig med y^* hvis hans d-værdi er 1.

For videre beskrivelse af den empiriske model, se Yao og Zhang side 228 – 229. Resultaterne bliver præsenteret i afsnit 3.3.4.4.

3.3.3 Data/parameterverdier

Yao og Zhang benytter et baseline case som grundlag for deres analyse, hvor parameterverdierne er følgende: Investor antages at begynde at tage sine beslutninger ved alder 20 ($t=0$), og fortsætter derefter at tage beslutninger hvert år. Hans levetid er maksimalt 100 år ($T=100$). Investor pensioneres i en alder af 65 ($J = 65$), og modtager en pensionsindkomst på $\theta = 60\%$ af sin indkomst i $J-1$.

Den årlige diskonteringsfaktor sættes til at være $\beta = 0,96$, og risiko aversionen sættes til $\gamma = 5$. I arvefunktionen er L lig med 20, altså ønsker investor at forsyne sin arvtager med 20 års indkomst til forbrugsgoder og hus servicier. Hus præferencen er sat til $\omega = 0,2$. Dette er konsistent med det gennemsnitlige forbrug på hus servicier ifølge Consumer Expenditure Survey fra 2001⁹.

Den årlige lejeomkostningen er sat til $\alpha = 6\%$ af husets reelle værdi, og den årlige vedligeholdelseskostning og deprecieringsomkostning er sat til $\psi = 1,5\%$. Dette er konsistent med de historiske, reelle omkostninger for at leje og eje. Omkostningen for at sælge et hus er sat til $\phi = 6\%$ af husets markedsværdi. Nedbetalingsandelen ved køb af et hus er sat til $\delta = 20\%$ af husets værdi.

Den risikofri rente sættes til $r_f = 2\%$, og risikopræmien på aktier til $\mu = 4\%$. Aktiernes standardafvigelse sættes til $\sigma_s = 15,7\%$, baseret på Standard & Poor's 500 indeksporteføljes historiske estimat. Den forventede værdistigning på de reelle huspriser er sat til $\mu_H = 0\%$, og volatiliteten til denne forventes at være $\sigma_H = 10\%$.

Korrelationerne brugt i baseline caset er følgende: $\rho_{Y,H} = 0,2$, $\rho_{Y,S} = 0,0$, og $\rho_{H,S} = 0,0$. Disse korrelationer er baseret på empiriske undersøgelser gjort på området.

Videre bliver sandsynligheden for et eksogent flyttechok sat til nul.

⁹ U.S. Department of Labor (2003).

Beskrivelse	Parameter	Værdi
Periode for død	T	80
Pensjonsalder	J	65
Pension som andel av lønindkomst	θ	0,60
Diskonteringsfaktor	β	0,96
Risiko aversion	γ	5
Antal år arven holder	L	20
Præferencen for hus over konsum	ω	0,20
Leje som andel af markedsværdi på hus	α	0,06
Nedbetaling ved køb af hus	δ	0,20
Vedligeholdelseskostninger	ψ	0,015
Likvideringsomkostning ved salg af hus	ϕ	0,06
Reelt afkast på fast ejendom	μ_H	0,00
Afkast på risikofri obligation	r_f	0,02
Risikopremie på aktier	μ	0,04
Standardafvigelse aktier	σ_S	0,157
Standardafvigelse hus	σ_H	0,10
Korrelation lønindkomst og hus	$\rho_{Y,H}$	0,20
Korrelation lønindkomst og aktier	$\rho_{Y,S}$	0,00
Korrelation hus og aktier	$\rho_{S,H}$	0,00

Tabel 15: Parametre og parameterværdier i Yao og Zhang.

I den empiriske analyse bruger Yao og Zhang PSID data fra 1984 til 2001, suppleret med PSID Wealth Supplements for årene 1984, 1989, 1994, 1999 og 2001. Informationen fra Wealth Supplements er rapporteret mere sjældent, og den empiriske undersøgelse er derfor baseret på tallene for de nævnte årstal.

Tabel 17 viser gennemsnits tal for nøglevariabler på tværs af forskellige aldersgrupper og årstal. Disse variabler er blandt andet andel investorer der ejer aktier, aktieandele, andel der ejer fast ejendom, husværdi som en andel af husholdningens totale nettoværdi, gæld over nettoværdi, og indkomstniveauer, etc.

Nogle nøgleresultater fra disse data er: aktieejerskab er pukkelformet i alder, med et toppunkt på 50 år. Antallet aktieejere er meget højere blandt husejere end for lejere. Husejere øger med investors alder indtil pension, som forudsagt af modellen. Andel der ejer fast ejendom observeret i dataene er lavere end i simulationsanalysen. Husholdningens nettoværdi er pukkelformet i alder og når et toppunkt i en alder af 55-65 for lejere, og 65-75 for ejere.

Variables	Age groups						Year				
	<35	35-45	45-55	55-65	65-75	>75	1984	1989	1994	1999	2001
OWNSTOCK	0.2495	0.3944	0.4688	0.4600	0.4019	0.3049	0.2794	0.3277	0.3960	0.4013	0.4285
OWNSTOCK	Renter	0.1969	0.2417	0.2756	0.2642	0.2083	0.1608	0.2215	0.2396	0.2250	0.2554
	Owner	0.2996	0.4355	0.5008	0.4850	0.4229	0.3240	0.3640	0.4504	0.4555	0.4811
S/NW	Renter	0.4409	0.4259	0.4714	0.4128	0.4157	0.2900	0.2829	0.4200	0.5565	0.6096
	Owner	0.1617	0.2067	0.2351	0.2271	0.2549	0.1296	0.1414	0.2267	0.2722	0.2667
S/SB	Renter	0.4474	0.5318	0.5006	0.5398	0.5242	0.3852	0.4076	0.5268	0.5743	0.5578
	Owner	0.4617	0.5158	0.5546	0.5264	0.5495	0.4172	0.4151	0.5383	0.5849	0.5851
OWNHOUSE		0.5117	0.7880	0.8382	0.8870	0.9019	0.7266	0.7452	0.7417	0.7649	0.7672
PH/NW		2.1015	1.5223	1.1288	0.7588	0.6290	1.0436	1.1564	1.1528	1.3715	1.4703
MORT/NW		1.4839	0.9348	0.5663	0.2346	0.0959	0.4546	0.5967	0.5949	0.8199	0.8786
NETWORKTH (\$100K)	Renter	0.1581	0.2574	0.3833	0.5771	0.4038	0.1844	0.2233	0.2759	0.2635	0.3348
	Owner	0.5882	1.0990	1.5461	1.7729	1.9119	1.0579	1.2282	1.3118	1.4602	1.5251
INCOME (\$100K)	Renter	0.2155	0.2545	0.2633	0.2357	0.1479	0.2008	0.2258	0.2044	0.2287	0.2373
	Owner	0.3142	0.3874	0.4070	0.3260	0.2284	0.2894	0.3292	0.3257	0.3454	0.3487
NW/INC	Renter	0.8983	1.0939	1.5502	2.2670	2.5653	1.0048	1.2523	1.8647	1.5325	1.6222
	Owner	2.2727	3.4232	4.6423	6.8697	9.7162	4.5961	4.3790	6.1475	5.7744	6.2095
AGEHEAD	Renter	26.866	38.986	48.070	58.976	69.464	38.178	39.197	40.199	39.241	39.950
	Owner	29.542	39.474	49.154	59.260	69.378	48.812	49.171	49.559	50.403	50.409
NUMOFKIDS	Renter	0.6799	1.1254	0.5968	0.1415	0.0357	0.6772	0.6943	0.6703	0.6452	0.6127
	Owner	1.2106	1.5791	0.6890	0.1454	0.0654	0.8698	0.8419	0.8190	0.7789	0.7369
OWNBUSI	Renter	0.0672	0.0932	0.1139	0.0708	0.0298	0.0755	0.0777	0.0813	0.0705	0.0600
	Owner	0.1518	0.2092	0.2221	0.1749	0.1250	0.1687	0.1953	0.1715	0.1752	0.1743
OWNOTHRE	Renter	0.0565	0.1243	0.1595	0.1745	0.0952	0.1084	0.1192	0.0967	0.0705	0.0600
	Owner	0.1358	0.2095	0.2794	0.3197	0.3083	0.2644	0.2613	0.2426	0.2230	0.2132
No. of obs.		4389	4100	3095	1876	1712	3003	3030	3523	3441	3582

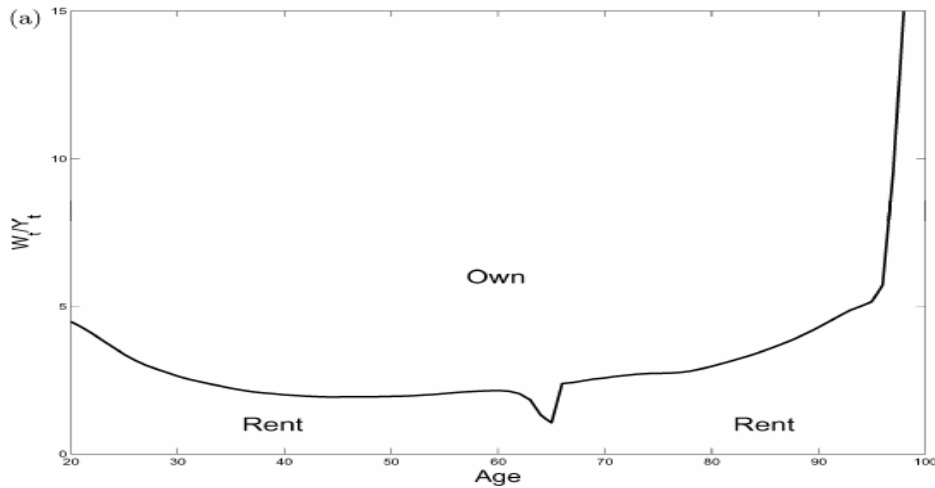
This table reports percentage of stock ownership (OWNSTOCK), average equity proportion in net worth (S/NW) and liquid financial assets (S/SB), percentage of home ownership (OWNHOUSE), average house-value-net-worth ratio (PH/NW), average mortgage—net worth ratio (MORT/NW), household net worth (NETWORKTH), and income (INCOME) in 1984 dollar, net worth—income ratio (NW/INC), age of the head of household (AGEHEAD), number of children under age 18 living in the household (NUMOFKIDS), percentage of households owning a business (OWNBUSI), and percentage of households owning other real estate assets (OWNOTHRE), across age groups and across various years.

Tabel 17: Fast ejendom og porteføljevælg for husholdninger i PSID data, 1984 – 2001 (table 2 i Yao/Zhang).

3.3.4 Resultater

3.3.4.1 Optimale portefølje uden at eje fast ejendom

Dette afsnit ser på investorerne der går ind i periode t uden at eje fast ejendom. Disse investorer er vigtige for analysen fordi 1/3 af amerikanske husholdninger lejer deres bolig. Resultatet vil også være aktuelt for en investor der har solgt sin bolig.



Figur 4: Optimalt valg af hus i begyndelsen af periode t (figure 1 a) i Yao og Zhang).

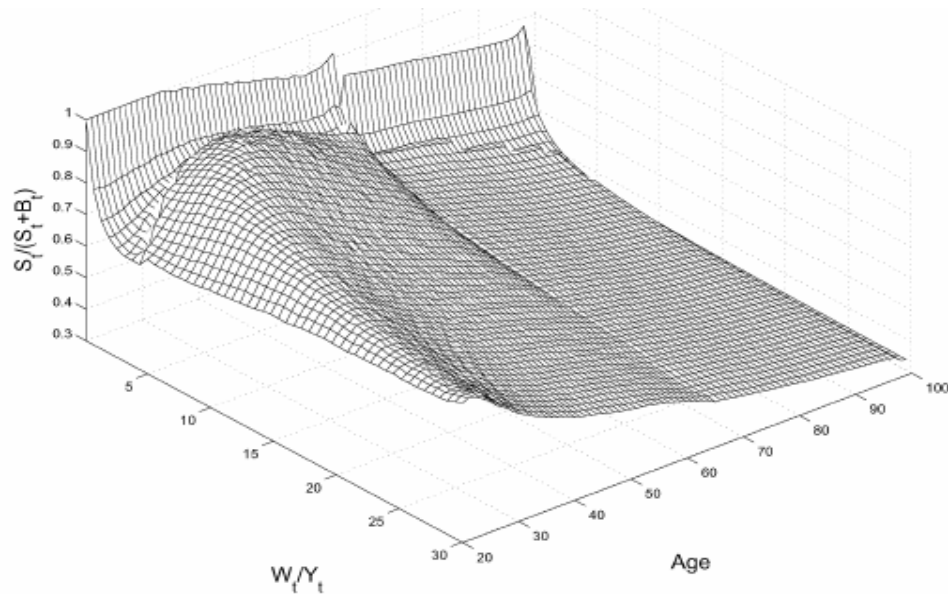
Figur 4 viser investors optimale valg af hus i begyndelsen af perioden som en funktion af investors nettoværdi over arbejdsindkomst og alder. Af denne figur kan det ses at en investor med høj nettoværdi over arbejdsindkomst (W_t/Y_t) vil købe fast ejendom, mens en investor med lavere W_t/Y_t kun vil leje sin bolig - for en givet alder. Årsagen til dette er at investor møder nedbetalinger og krav til likvid formue ved ejerskab af hus. En rig investor kan tage sig råd til at købe et hus på størrelse med det han ønsker, og kan derfor spare likvideringsomkostningerne ved at bo i huset en lang periode.

Grænsen reduceres eftersom investor ældes, men efter de fyldte 40 vil den stige, med et kortvarigt fald ved pensionering. En investor på 20 vil derfor kræve en højere nettoværdi over arbejdsindkomst for at købe hus end en investor på for eksempel 65. Efter de fyldte 65 vil arvemotivet dominere over ønsket om at eje et hus, som en følge af den øgede dødelighedsrate. Ved meget høje aldre vil investor derfor altid leje sin bolig.

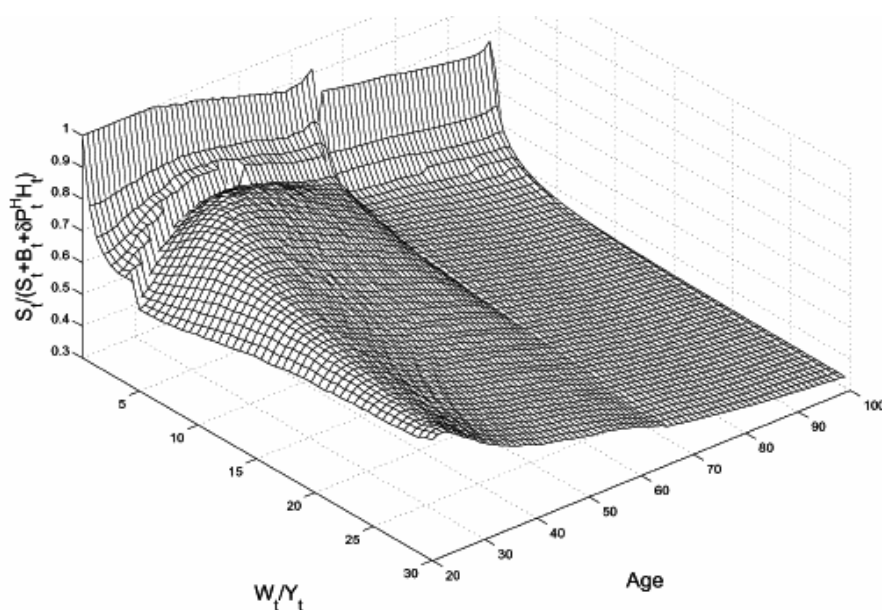
Endvidere undersøger Yao og Zhang investors investeringsproblem. Hvis investor lejer sin bolig, vil al hans (finansielle) nettoværdi være i enten aktier eller obligationer – i modsætning til hvis han køber hus, hvor en andel af denne nettoværdi vil være bundet i fast ejendom. Der skilles derfor mellem likvide aktiver (aktier og obligationer) og nettoværdi (aktier, obligationer og fast ejendom).

Figur 5 a og b viser de optimale porteføljeandele i investors likvide aktiver og i hans nettoværdi - det bliver fokuseret på andelen i den likvide portefølje. Når investor er lejer, kan hans aktieandel nå meget høje værdier, næsten helt op til 100%. Denne andel falder når W_t/Y_t stiger, og er konsistent med fund i undersøgelser uden risikabel, fast ejendom. Dette er et

resultat af investors mulighed til at diversificere på grund af sin forholdsvis risikofri human kapital.



Figur 5 a): Optimalle porteføljeandele i likvid, finansiel portefølje (figure 2 a) i Yao og Zhang) – der $S_t + B_t =$ likvid, finansiel formue og $W_t =$ nettoværdi.



Figur 5b): Optimalle porteføljeandele i nettoværdi (figure 2 b) i Yao og Zhang) – der $S_t + B_t + \delta P_t^H H_t =$ nettoværdi (tilsvarende finansiel nettoværdi i Cocco).

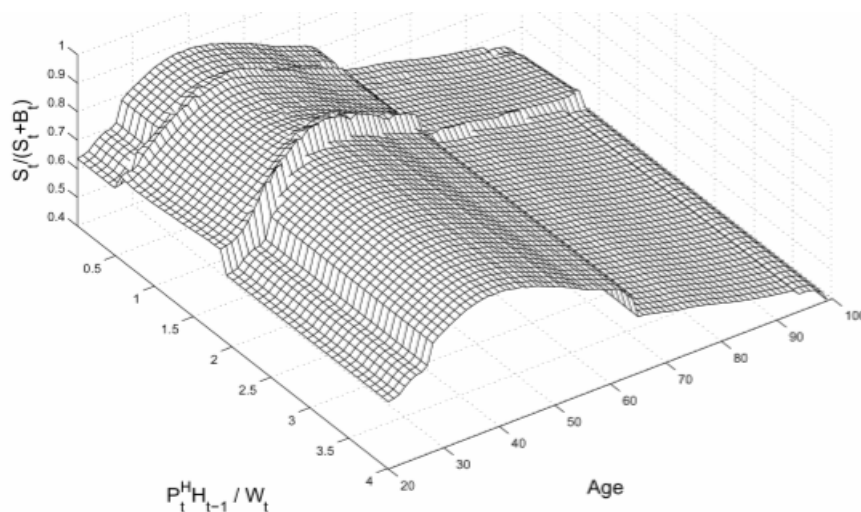
Videre er det to forhold der resulterer i at aktieandelen for en ejer er stigende i investors første år, men synker derefter: For det første har meget unge investorer der ejer hus en mere begrænset økonomi, og reducerer dermed sin andel i aktier for at blive kvit med noget af risikoen.

For det andet vil investors human kapital reduceres når han ældes. Han har derfor en lavere andel i "det risikofri aktiv", og reducerer dermed sin andel i aktier.

At en investor der ejer fast ejendom vil holde en lavere aktieandel i forhold til nettoværdi er ingen overraskelse. At han derimod vil holde en højere aktieandel i forhold til hans likvide formue kan ved første øjekast virke overraskende, men dette er en naturlig konsekvens af den lave korrelation mellem hus og aktier. Investoren der ejer sit hus bruger dermed sin aktiebeholdning til at diversificere risiko. Dette kan ses af figur 6 a og b (se vedlæg 1).

3.3.4.2 Optimale porteføljeandele ved at eje fast ejendom

Dette afsnit koncentrerer sig om investorer der går ind i periode t som ejere af fast ejendom. For disse investorer eksisterer det fire strategier for periode t : a) Fortsætte med at eje (S), b) Sælge sit hus og i stedet leje sin bolig (R), c) Sælge sit hus og købe et større (U) og d) Sælge sit hus og købe et mindre (D). Figur 7 (se vedlæg 1) viser disse strategier. Som man kan se, synker både den øvre og nedre grænse for S når W_t/Y_t stiger. Videre kan det ses at eftersom investors nettoværdi over arbejdsindkomst er lav, vælger han at leje efter at have solgt sit hus. Dette er først og fremmest et resultat af hans likviditetsbegrænsninger.



Figur 8: Optimale porteføljeandele i forhold til den likvide, finansielle formue (figure 4 b) i Yao og Zhang).

Endvidere viser figur 8 de optimale porteføljeandele i forhold til den likvide formue for en investor der ejer fast ejendom. Af denne figur fremgår det at bortset fra i S-området er det overordnede livscyklusmønster meget lig det der gælder for lejere. Her vil investors aktieandel som en funktion af husværdi over nettoværdi være U-formet. Dette er konsistent

med Grossman og Laroque (1990), som beviser at investor er mindre risiko avers kort tid inden han køber et nyt hus, og mere risiko avers lige efter at have købt et hus. Dette resulterer i en højere aktieandel for investorer der ligger nær grænserne i S - men alligevel vil investors aktieandele over nettoværdi reduceres når husværdi over nettoværdi stiger. Dette er et resultat af modellens krav til sikkerhedsstilling ved ejerskab af hus. Når investor undgår at sælge et hus der overstiger hans optimale størrelse, reducerer han sin likvide finansielle beholdning for at finansiere dette.

3.3.4.3 Alternative strategier/parameterværdier og hedging med fast ejendom

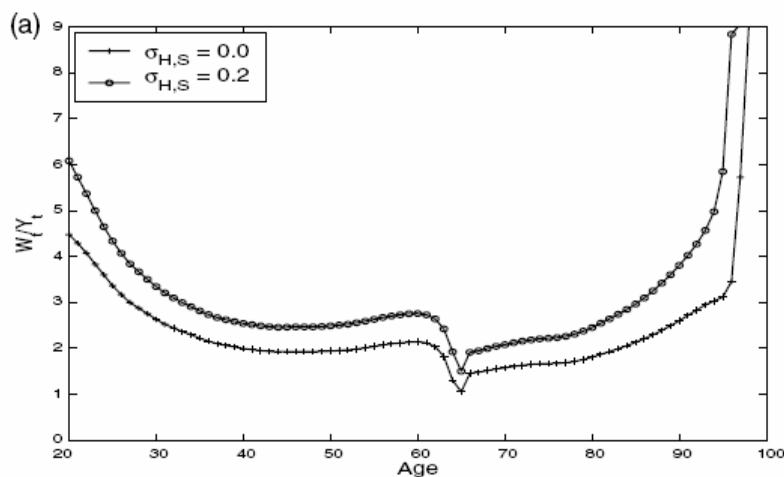
Yao og Zhang undersøger også investors konsekvenser af at kun leje eller kun at eje hele sit liv. Resultaterne for en investor der altid lejer er følgende: Investors velfærdsomkostning vil stige med nettoværdi over arbejdsindkomst. Dette sker fordi investor vil have mere nytte af at eje et hus når hans nettoværdi øger i forhold til hans arbejdsindkomst, på grund af at hans likviditetsbegrænsninger lettes. Velfærdsomkostningen er pukkelformet i forhold til investors alder, noget der reflekterer de kombinerede effekter af likviditetsbegrænsninger (forsvinder ved høj alder), arvemotivet (øger ved høj alder) og investeringshorisonten (lang investeringshorisont fører til at ejerskab er mere sikkert).

En investor der altid lejer vil opleve at hans aktieandel bliver biased opad – han holder derfor en mere risikabel portefølje end han burde. Dette er et resultat af at han ikke sparer midler op til at købe hus. Forskellen mellem denne investor og en investor med hus når sit højdepunkt i en alder af 40, med 4,3%.

Resultaterne for en investor der altid ejer vil være modsat af de for investorerne der altid lejer. Velfærdsomkostningerne synker når nettoværdi over arbejdsindkomst stiger, og er U-formet i forhold til investors alder. Investors aktiebeholdning vil blive biased nedad ved at altid eje. Velfærdsomkostningen kan blive meget høj for investorer med en lav nettoværdi over arbejdsindkomst eller en meget gammel investor. Dette implicerer at ekskludering af lejemarkedet i porteføljestudier kan føre til forkerte valg for investorer der har en meget begrænset likviditet eller er meget gammel.

I baseline caset i Yao og Zhang er afkast på hus ukorreleret med afkast på aktier. Hvis man derimod antager at disse afkast er korreleret, forventes det at hedge-efterspørgselen efter aktier ændres. Som det kan ses af figur 9 a, bliver grænsen for at eje kontra at leje hævet hvis det antages at hus og aktier har en positiv korrelation på 0,2. Dette betyder at investor er nødt

til at spare mere op før han kan få råd til at købe et hus, og reflekterer det faktum at den positive korrelation medfører højere chance for likviditetsbegrænsninger hos investor. Figur 9 b (se vedlæg 1) viser at husejeres aktieandel over likvid formue synker for en givet alder ved en positiv korrelation mellem fast ejendom og aktier. Dette er et resultat af at aktier ikke længere er et ligeså godt hedge mod risiko på fast ejendom. Det modsatte kan derimod ses for investorer der lejer sin bolig – se figur 9 c (vedlæg 1). For en givet alder vil en investor der lejer holde en højere aktieandel når fast ejendom og aktier er positivt korreleret. Dette kan forklares med at en lejetager holder en såkaldt ”kort” position i hus-aktivet, og kan derfor påtage sig mere risiko hvis korrelationen mellem fast ejendom og aktier øges.



Figur 9a): Grænse for at eje kontra at leje som en funktion af nettoværdi over arbejdsindkomst og alder (figure 7 a) i Yao og Zhang).

Yao og Zhang undersøger også konsekvenserne af at ændre nogle af parameterværdierne i baseline caset. At sætte fast ejendoms risiko og korrelationerne mellem fast ejendom og arbejdsindkomstens vækst lig med nul fører derimod til at grænsen skifter nedad før pensionsalder. Dette er en konsekvens af at lånebegrænsningen nu slækkes. Siden risiko på fast ejendom også fører til nul korrelation mellem afkast på hus og arbejdsindkomstens vækst, vil det være bedre at eliminere risiko på fast ejendom end at sætte korrelationen til nul for at øge antallet investorer der ejer. Ved nul risiko på fast ejendom og nul korrelation mellem arbejdsindkomstens vækst og fast ejendom har investor muligheden til at holde en mere risikabel portefølje.

Ændring af andre parametre, en komparativ, statistisk analyse samt en simulationsanalyse kan ses i Yao og Zhangs afsnit 2.4 – 2.6.

3.3.4.4 Empiriske resultater

Tabel 18 (se vedlæg 1) viser resultaterne af logit-estimaterne for aktiemarkedsdeltagelse for lejere og ejere (formel (33)). Som man kan se af nettoværdien og indkomstens positive lineære og negative kvadratiske koefficient for ejer og lejer, bidrager en høj nettoværdi og indkomst positivt til investors beslutning om at deltage i aktiemarkedet, og effekten aftager noget eftersom nettoværdi og indkomst fortsætter med at stige. Det samme gælder for investors alder, men kun for dem der ejer hus. For lejetagere er alder insignifikant. Alle variabler relateret til den faste ejendom har en signifikant effekt på en husejers aktiemarkedsdeltagelse. Husets værdi over nettoværdien en negativ, men aftagende effekt på investors beslutning om deltagelse. Dette kan forklares med deltagelsesomkostningen, som vil være af betydning i en højere grad for en investor der har begrænsede likvide midler til at handle aktier (høj husværdi/nettoværdi). I modsætning til denne variabel har gæld over nettoværdi en positiv effekt på investors deltagelse. Dette er et resultat af likvideringsomkostningen ved at sælge hus, samt omkostningerne ved at refinansiere et lån. Investorer med en høj gæld bruger aktier til at sikre sig mod at være nødt til at refinansiere lånet eller sælge sit hus.

Tabel 19 viser determinanterne i investors porteføljeandelsbeslutning. Af denne tabel kan det ses at en høj nettoværdi over indkomst fører til en høj aktieandel i både nettoværdi og likvide, finansielle aktiver. Tabellen indikerer at de fleste investorer ligger på den opadpegende side af pukkelformen forudsagt af modellen. Effekten af nettoværdi over indkomst er derimod insignifikant for lejere.

Begge aktieandele stiger eftersom en lejer ældes, mens forholdet for aktier over nettoværdi er pukkelformet for en investor der ejer. Hans aktieandel over likvide aktiver er derimod aftagende med alder.

De empiriske resultater stemmer godt overens med resultaterne baseret på simulationsanalysen (Yao og Zhang, afsnit 2.6), bortset fra nogle forskelle. For eksempel når husejere i den empiriske undersøgelse deres toppunkt på aktieandele over nettoværdi meget senere end hvad der forudsiges i simulationsanalysen. Dette peger på at investorer har en meget mere begrænset likviditet i virkeligheden end i modellen.

Aktieandelene over likvide finansielle aktiver i ejeres porteføljer har gennemsnitlig steget over tid. Dette er et resultat af aktiemarkedets gode præstationer i udvalgsperioden, og indikerer at det er et behov for at inkludere omkostninger for at rebalancere porteføljevægte

og tidsvarierende forventede afkast, alt for at matche modellens forudsagde værdier til de empirisk observerede.

Variables	Renter				Homeowner			
	S/NW		S/SB		S/NW		S/SB	
	Coeff.	SE	Coeff.	SE	Coeff.	SE	Coeff.	SE
NW/INC/10	0.268	0.315	0.231	0.231	0.035	0.017**	0.055	0.027**
NW/INC ² /100	-0.034	0.033	-0.025	0.023	-0.004	0.002*	-0.006	0.003*
INCOME (\$100K)	0.171	0.396	-0.172	0.280	0.008	0.020	-0.013	0.031
INCOME ²	-0.070	0.062	-0.010	0.052	-0.001	0.001	0.001	0.002
AGEHEAD/10	0.073	1.614	0.994	1.237	0.234	0.133*	-0.190	0.230
AGEHEAD ² /100	0.094	0.045**	0.076	0.026***	-0.027	0.004***	-0.039	0.006***
NUMOFKIDS	0.078	0.069	0.182	0.071***	0.013	0.009	0.023	0.016
OWNBUSI	0.137	0.164	0.150	0.196	-0.062	0.019***	-0.034	0.028
OWNOTHRE	-0.651	0.247**	-0.702	0.148***	-0.037	0.013***	0.031	0.023
PH/NW					-0.426	0.060***	-0.090	0.104
PH/NW ²					0.024	0.022	0.025	0.034
MORT/NW					0.472	0.061***	0.155	0.097
MORT/NW ²					-0.074	0.033***	-0.094	0.047**
YEAR89	-0.504	0.711	-0.791	0.589	0.044	0.065	0.320	0.115***
YEAR94	-0.701	1.443	-1.468	1.184	0.169	0.129	0.805	0.230***
YEAR99	-1.152	2.083	-2.259	1.791	0.251	0.191	1.180	0.340***
YEAR01	-1.151	2.357	-2.506	2.033	0.279	0.217	1.321	0.387***

Tabel 19: Aktieandele for lejere og ejere (tabel 4 i Yao og Zhang) - S/NW = aktier over nettoværdi. Tilsvarende aktier over finansielle aktiver i Cocco. S/SB = aktier over likvide, finansielle aktiver (aktier + obligationer). Tilsvarende aktier over likvide aktiver i Cocco.

3.3.5 Konklusion

Yao og Zhang undersøger i deres analyse investors optimale konsum, hus og porteføljevalg når han modtager stokastisk arbejdsindkomst og oplever risiko på sin faste ejendom, krav til sikkerhedsstillelse og likvideringsomkostninger. Resultaterne viser at investor vælger at leje når han har begrænsninger i likvide midler, og køber fast ejendom når han har sparet nok midler op. Investor vil også leje når hans sandsynlighed for at dø er høj på grund af hans ønske om at efterlade sig arv.

I de tilfælde hvor investor ejer sin bolig, vil hans aktieandel over nettoværdi reduceres på grund af at noget af hans kapital vil ændres fra aktier til kapital bundet i fast ejendom. Alligevel vil, som et resultat af diversifikationseffekten som følger af den lave korrelation mellem aktier og fast ejendom, investor holde en højere aktieandel over likvid, finansiell formue. At følge en suboptimal strategi, at enten leje i alle perioder eller eje i alle perioder, kan medføre store velfærdstab, og kan også påvirke investors porteføljevalg. Det vil genereres et ikke-justeringsområde for hus servicering på grund af likvideringsomkostninger, som også påvirker investors portefølje. Investor holder en højere aktieandel når han nærmer sig grænserne i ikke-justeringsområdet for at opnå det højeste mulige afkast over risiko.

Ved at benytte sig af PSID data i empirisk analyse viser Yao og Zhang at lejere og ejere af fast ejendom har forskellige determinanter i sine porteføljebeslutninger. De reagerer også forskellig på nøglevariable som nettoværdi over indkomst og alder. Dette støtter noget af det forudsagt af modellen.

3.3.6 Modellens svagheder

Yao og Zhangs model inkluderer ikke eventuelle omkostninger ved at refinansiere. I virkeligheden vil det eksistere omkostninger både for at justere sine aktie- og obligationsandele og for at refinansiere sit lån. Dette vil påvirke investors porteføljevalg, afhængig af hvor store disse omkostninger viser sig at være.

Modellen indebærer heller ikke en endogen omkostningsforskel mellem at leje og eje sin egen bolig på basis af moral hazard og adverse selection. Investorer vil sandsynligvis have forskellige præferencer for at leje eller eje, for eksempel vil nogle investorer hellere leje fordi de så ikke har samme ansvar for vedligehold, som hvis de ejer sin bolig. Videre arbejde med lignende modeller har derfor mulighed for at endogenisere disse følgerne af moral hazard og adverse selection.

3.4 Valg af model til videre analyse

I afsnit 3.1 – 3.3 har tre eksisterende modeller der inkluderer fast ejendom i investors porteføljeanalyse blevet beskrevet og diskuteret. Når en af disse modeller skal vælges til videre analyse, er det vigtigt at modellerne bliver nøje vurderet, sådan at det rigtige valg kan tages. I dette afsnit vil de tre modellers egenskaber derfor blive sammenlignet, og det vil lægges vægt på hvor nemme modellerne er at forstå, samt styrker og svagheder.

Cocco (2000) er første model beskrevet – se afsnit 3.1. Denne model gælder kun for investorer der ejer fast ejendom, og er en dynamisk model. I denne model vælges størrelsen på fast ejendom sammen med den finansielle portefølje. Dette *kan* være en uheldig antagelse, da mange investorer gerne vil finde den optimale portefølje givet sin faste ejendom og gæld, men den giver også investorer muligheden for at finde det optimale hus-niveau.

Modellen er enkel at forstå, og genererer tre klare regressioner der beskriver determinanterne for investorers porteføljeallokering mellem de finansielle aktiver. Disse regressioner sammenlignes så med tre tilsvarende regressioner på basis af empiriske data.

Modellen forklarer også et af de puzzles genereret af klassiske porteføljemodeller – hvorfor aktieandelen synes at øge eftersom investor ældes, mens klassiske modeller forudsiger det modsatte.

Modellen har også nogle svagheder. For eksempel er skat udeladt fra undersøgelsen, og eventuelle skattefordeler ved for eksempel at holde gæld bliver dermed ikke taget hensyn til. I tillæg er der nogle mindre betydningsfulde svagheder, for eksempel antagelsen om omkostningsfri refinansiering, udeladelsen af investors eventuelle forretningsmidler, samt antagelsen om konstant huspræference.

Kort fortalt forklarer modellen godt de empiriske resultater, og kan dermed siges at være en god model for videre undersøgelse.

I modsætning til Cocco er Flavin og Yamashita (1998) en statisk model, og tager investors størrelse på hus for givet. Modellen inkluderer kun investorer der ejer sin bolig- men ifølge (1) kan investorer kan også leje ud noget af sin bolig. Den skiller sig også fra Cocco på skattepunktet, det vil sige, at den inkluderer skattemæssige virkninger på investors porteføljevalg. Den bruger, i lighed med de to andre modeller, PSID data, men for en noget længere periode end Cocco og Yao/Zhang.

Modellen genererer ingen klare regressioner der forklarer determinanterne for investorers porteføljevalg som Cocco og Yao/Zhang – bortset fra tabel 4, der forklarer investors aktieandel som en funktion af hus over nettoværdi. Den kan heller ikke forklare den høje andel af investorer der ikke har aktier eller gæld på sin faste ejendom. I tillæg antager den at korrelationer, afkast og standardafvigelser er konstante over tid. Modellen giver derfor kun delvis ligevægt.

Alligevel gør modellen det rimelig godt i at forklare investorernes aktie- og obligationsandele.

Yao og Zhang (2005) inkluderer både investorer der ejer og lejer sin bolig. Dette gør det muligt for investor at skille mellem hans forbrug af og investering i fast ejendom. Modellen er nem at forstå, og går samtidig i dybden når det gælder investors valg mellem at leje og eje – hvilke omkostninger investor møder når han følger en suboptimal strategi om enten at altid leje eller altid eje. Den empiriske analyse forklarer både hvad der bestemmer investors valg om at deltage i aktiemarkedet, samt determinanterne for investors porteføljevalg i PSID

dataene, og giver derfor klare regressioner som i Cocco – dog kun to, mod Coccos tre. Yao og Zhang løser også det ovenfor nævnte puzzle.

Modellen har nogle få svagheder der er værd at nævne. For det første antager den som Cocco at der ikke eksisterer omkostninger i forbindelse med refinansiering. For det andet inkluderer den ikke skattemæssige virkninger – også i lighed med Cocco.

Samlet set forklarer alle de tre modeller investorers porteføljevalg på en tilfredsstillende måde – dog på hver sin måde. Cocco og Yao/Zhang ligner hinanden meget, bortset fra muligheden for at leje i Yao og Zhangs model. Inkludering af lejemarkedet ændrer porteføljemønstret noget, men mest for investorer der har meget begrænset likviditet, eller som er meget gamle. Det forudsættes at disse udgør en meget lille andel af alle investorer.

Da den udvalgte model skal sammenlignes med den i afsnit 4 udvidede Lund Larsen model i analysen, er det en klar fordel at variablerne i modellen falder sammen med variablerne i den udvidede model. I denne forbindelse er det Cocco der stikker sig frem som den bedst egnede model. Modellen er enkel, samtidig som den både genererer determinanter der omtrent tilsvarende variablerne i den udvidede model fra afsnit 4. Når den udvidede model i afsnit 5 skal sammenlignes med en af de beskrevne modeller i afsnit 3, bliver Coccos model fra 2000 derfor valgt.

4 Udvidelse af Lund Larsen-model

Da den klassiske porteføljemodel ikke inkluderer investors formue i fast ejendom, vil det være af meget stor interesse at undersøge hvordan den vil se ud hvis denne inkluderes. På denne måde kan modellen tilpasses de enkelte investorer meget bedre, og investorerne kan holde aktieandele der bedre genspejler deres præferencer. Opgavens tid- og pladsressourcer medfører imidlertid at der ikke vil være mulighed for at gå i dybden i sådan en undersøgelse. Der vil alligevel forsøges kort at foreslå en potentiel udvidet model, hvor både finansiell formue, human kapital, samt investors formue i fast ejendom er inkluderet. Det er vigtigt at understrege at denne udvidede model *ikke* vil være baseret på omfattende, statistiske undersøgelser, men hellere et kvalificeret gæt, som eventuelt kan pege andre, dybere undersøgelser i rigtig retning.

4.1 Den oprindelige model

Den oprindelige model blev først udviklet af Campbell og Viceira i bogen ”Strategic Asset Allocation” fra 2002, og blev igen diskuteret i Lund Larsens artikel ”Lønindkomstens betydning for porteføljevalget” fra 2007. Modellen inkluderer som noget nyt (i forhold til tidligere modeller) investors forventede, fremtidige arbejdsindkomst – human kapital. Som nævnt i afsnit 1.1 - formel (2) - fremgår modellen sådan:

$$\alpha^* = \left(1 + \frac{\bar{H}}{F}\right) \left(\frac{\mu - r_f + \sigma^2/2}{\gamma\sigma^2}\right) - \left(\frac{\bar{H}}{F}\right) \left(\frac{\sigma_{H,F}}{\sigma^2}\right) \quad (35)$$

der H = gennemsnitlig human kapital, F = finansiell formue, H/F = er middelværdien af H_t/F_t , og $\sigma_{H,F}$ = kovariansen mellem lønindkomst og aktieafkast. Denne kovarians divideret med aktieafkastets varians (σ^2) er lig med korrelationen mellem lønindkomst og aktieafkast.

Ifølge denne formel – der kalkulerer investors optimale aktieandel af hans finansielle formue – vil investors optimale aktieandel bestemmes af to led: Det første består af den allerede kendte aktieandel af investors totale formue, samt justering for hvor høj hans human kapital er i forhold til den finansielle kapital. Det andet led justerer optimal aktieandel for risiko på human kapital i forhold til aktier, og er altså modellens led for hedging med aktier, givet investors fremtidige arbejdsindkomst. Det grundlæggende princip for modellen er at man som investor skal holde en højere aktieandel jo lavere korrelationen er mellem arbejdsindkomst og aktieafkast, alt andet givet. For de fleste investorer vil denne korrelation være lav, og resultatet er derfor at som investors ældes og hans human kapital bliver mindre, skal også aktieandelen af finansiell formue nedbringes.

Da livscyklusen på investorers holdte aktieandele i markedet viser sig at være anderledes end hvad der er anbefalet af modellen, vil det være nødvendigt at udvide modellen med blandt andet formue i fast ejendom, for at se om dette kan være årsagen til forskelle mellem teori og praksis.

4.2 Antagelser

Da der ikke er tid eller plads til at gennemgå dybe undersøgelser om hvilke antagelser der passer for den udvidede model, vil det være en grundlæggende antagelse at den udvidede model vil bygge på samme antagelser som den oprindelige model. Dette vil for eksempel sige, at de fleste investorer antages at have en lønindkomst der er lavt korreleret med aktieafkastet, og at investor søger at maksimere sin nytte ved at justere sin aktieandel. Separationsteoremet vil også antages at holde. Det vil sige, at alle investorer holder den samme portefølje – markedsporteføljen – og at de vil allokere deres finansielle kapital mellem denne og det risikofri aktiv på forskellige måder¹⁰. Videre vil det antages at aktieandelen i forhold til total formue vil være den samme for alle investorer, altså vil α (aktieandel i forhold til total formue) i følgende formel være lig for alle:

$$\alpha = \frac{E_t R_{t+1} - R_{f,t+1} + \sigma_t^2/2}{\gamma \sigma_t^2}$$

Siden investorer også sidder inde med en fremtidig arbejdsindkomst - som kan karakteriseres som enten "aktier" eller "risikofrit aktiv" - og i den udvidede version også formue i fast ejendom, vil aktieandelene i forhold til den finansielle formue derimod være ulige fra investor til investor. Dermed er det op til den enkelte investor at finde ud af hvor høj hans aktieandel i forhold til finansiell formue skal være.

I modellen ignoreres skat, og eventuelle skattefordele ved for eksempel at holde gæld vil derfor ikke undersøges. I tillæg vil der ikke undersøges hvilken virkning en eventuel omkostning for at deltage i aktiemarkedet vil have på investorernes optimale aktieandele, og i den endelige model vil denne type omkostninger derfor ignoreres.

Der må imidlertid udarbejdes nogle nye antagelser for investors formue i fast ejendom (og også gæld på denne), da denne ikke inkluderes i den klassiske model. Det vil derfor antages at korrelationen mellem aktieafkast og den faste ejendoms værdi vil påvirke investors optimale aktieandel på samme måde som korrelationen mellem aktieafkast og den fremtidige

¹⁰ Tobin Separation Theorem - http://www.moneychimp.com/glossary/tobin_separation_theorem.htm

arbejdsindkomst. Dette faktum støttes af Henry Høeg i artiklen ”Huset – dit livs bedste investering?”¹¹, der skriver at en investor kan øge sin formue ved at kombinere fast ejendom med aktier – uden at øge risikoen. Dermed vil investor teoretisk set kunne hedge bort risiko på hans faste ejendom ved at holde aktier – hvis de altså er perfekt negativt korreleret.

Korrelationen mellem aktieafkast og værdi på investors gæld på fast ejendom vil derimod påvirke optimal aktieandel modsat vej – en lav korrelation mellem disse vil føre til en lavere optimal aktieandel. Dette fordi gælden, i modsætning til fremtidig arbejdsindkomst og formue i fast ejendom, står i minus, og en højere værdi på gælden vil være negativt for investor. Ved en høj gæld vil investor være nødt til at have en højere likvid formue til rådighed for at kunne betale sine afdrag. Ved en høj korrelation mellem aktieindeksets afkast og gældens rente vil gældsrenten synke når aktieafkastet synker. Siden det er positivt for investor at gældsrenten synker, men negativt at aktieafkastet reduceres, vil disse derfor tilnærmelsesvis eliminere hinanden, og investor kan holde en højere aktieandel.

I tillæg til de ovenfor nævnte antagelser, vil det være nødvendigt for den udvidede model at antage nul korrelation mellem de resterende aktiver – altså er $\rho_{H,E}$, $\rho_{E,G}$ og $\rho_{H,G}$ lig med nul. Hvis denne antagelse ikke holder, og $\rho_{H,E}$ eksempelvis er højere end nul, vil en beholdning af human kapital påvirke hvor meget en beholdning af fast ejendom påvirker optimal aktiebeholdning. Derfor er det afgørende for modellens succes at korrelationen mellem disse er nul.

Der ses bort fra diskontering af human kapital i dette afsnit. Investors human kapital vil derfor være lig med summen af alle fremtidige arbejdsindkomster.

4.3 Resultater

4.3.1 Den nye model

Med disse antagelser, samt den klassiske model uden fast ejendom, vil det i dette afsnit forsøges at komme med et forslag for hvordan modellen vil kunne se ud ved inkludering af formue i fast ejendom, og gæld på denne.

¹¹ Huset – dit livs bedste investering? - <http://formuepleje.dk/sw25884.asp>

Til det første led i den klassiske model vil det blive nødvendigt at tillægge to nye del-led – et for fast ejendom, og et for gæld. Da værdien på disse to - som bestemmes af værdistigning på boligmarkedet for fast ejendom, og gældsrenten for gælden - ikke nødvendigvis følger samme mønster, vil den optimale aktieandel af total formue derfor blive justeret med – i tillæg til human kapital over finansiell formue – værdi på fast ejendom over finansiell formue og gæld over finansiell formue.

Jo højere fast ejendom over finansiell formue vil være, jo højere vil optimal aktieandel derfor blive for investor, alt andet givet. For gælden vil det modsatte være tilfælde – jo højere denne er, jo lavere vil optimal aktieandel være. For fast ejendom vil fortegnet derfor være positivt, mens det for gæld vil være negativt.

Der vil også blive lagt to nye led til efter det andet led i den oprindelige model. For det første vil et led med negativt fortegn blive lagt til, bestående af to del-led – et for formue i fast ejendom over finansiell formue, og et for korrelationen mellem fast ejendom og aktieafkast. Disse to del-led vil så multipliceres med hinanden.

Videre vil et sidste led blive lagt til i modellen, nemlig justeringen for gældens korrelation med aktieafkastet. Dette led vil have positivt fortegn, fordi det, i forhold til fast ejendom, påvirker investors optimale aktieandel på modsat måde. Dette led vil også bestå af to del-led – et for gæld over finansiell formue, og et for korrelationen mellem gæld på fast ejendom og aktieafkast. Disse to del-led multipliceres også med hinanden.

Den endelige, foreslåede model vil dermed se sådan ud:

$$\alpha^* = \frac{\left[\mu - r_f + \frac{\sigma^2}{2} \right]}{\left[\gamma \sigma^2 \right]} \left[1 + \frac{H}{F} + \frac{E}{F} - \frac{G}{F} \right] - \left[\frac{H}{F} * \frac{\sigma_{H,F}}{\sigma^2} \right] - \left[\frac{E}{F} * \frac{\sigma_{E,F}}{\sigma^2} \right] + \left[\frac{G}{F} * \frac{\sigma_{G,F}}{\sigma^2} \right] \quad (36)$$

Der E = fast ejendom, G = gæld på fast ejendom, $\sigma_{E,F}$ = kovarians mellem fast ejendom og finansiell formue, og $\sigma_{G,F}$ = kovarians mellem gæld på fast ejendom og finansiell formue.

Denne udvidelse af modellen vil naturligvis få konsekvenser for optimal aktieandel for de investorer der, i tillæg til at holde finansiell formue og human kapital, ejer fast ejendom, samt at de der har gæld på denne. Den nye optimale aktieandel af finansiell formue vil tage hensyn til de nu inkluderede aktiver, og en investor med fast ejendom kan derfor tilpasse sin aktieandel så den bedre reflekterer hans finansielle forhold. Har fast ejendom eksempelvis en meget høj korrelation med den finansielle formue (aktieindekset) vil det blive nødvendigt at reducere aktieandelen i hans finansielle formue. Modsat vil en høj korrelation mellem gæld og aktieindekset føre til en øgning i investors optimale aktieandel, alt andet lige. Disse to forhold ville have blevet overset i den klassiske model.

4.3.2 Eksempel på forskelle

For at illustrere disse forskelle mellem den klassiske og den udvidede model, vil der i det følgende vises et eksempel på en investor der både holder human kapital, finansiell formue, fast ejendom, samt gæld på fast ejendom. Hans optimale aktieandel vil først blive beregnet med den klassiske model, og så med den udvidede model. Til sidst vil eventuelle forskelle mellem disse aktieandele blive diskuteret.

I eksemplet vil der antages en 30 år gammel investor med en finansiell formue (F) på 100 000. Da hans forventede levetid på arbejdsmarkedet er ca. 35 år, og hans arbejdsindkomst antages at være 400 000 per år, vil hans forventede human kapital (H) være 14 mio. Han antages at eje et hus der er værd 2 mio., og har en gæld på dette hus til en værdi af 1 mio.

Når det gælder markedets afkast og korrelationer, vil der antages en risikopræmie ($\mu - r_f$) på aktieindekset på ca. 10 %. Standardafvigelsen på aktieindekset (σ) antages at være 20%, og investors risikoaversion 2. Den forventede korrelation mellem human kapital og aktieindekset antages at være 0,26, mellem fast ejendom og aktieindekset 0,05, og mellem gæld på fast ejendom og aktieindekset -0,05.

Korrelationen mellem fast ejendom og aktieindekset på 0,05 er ifølge Høeg (2007) meget realistisk. Ifølge denne artikel har de to markeder faldet samtidig i kun 2 ud af 50 år, og har derfor en meget lav korrelation.

Ifølge tabel 7.1 i Campbell og Viceira (2002), viser empiriske studier at korrelationen mellem arbejdsindkomst og aktier enten er nul eller mellem 0,3 – 0,5. 0,26 er derfor her valgt som en mellemværdi af disse.

Bemærk at de resterende parametre ikke er begrundet i virkelige data, men kun valgt for at illustrere forskellen mellem de to modeller.

	Symbol	Værdi
Risikopræmie aktier	$\mu - r_f$	10 %
Standardafvigelse aktier	σ	20 %
Risiko aversion	γ	2
Human kapital	H	14000000
Finansiel formue	F	100000
Fast ejendom	E	2000000
Gæld på fast ejendom	G	1000000
Korrelation H og F	$\sigma_{H,F}/\sigma^2$	-0,2
Korrelation E og F	$\sigma_{E,F}/\sigma^2$	-0,05
Korrelation G og F	$\sigma_{G,F}/\sigma^2$	0,1

Tabel 20: Parameterværdier for sammenligning af klassisk og udvidet porteføljemodel, investor på 30 år.

Optimal aktieandel beregnes som nævnt først for den klassiske model, der kan ses af (35). Sættes de ovenfor nævnte værdier ind i (35), fås følgende resultat:

$$\alpha^*_{30} \text{ (klassisk model)} = 0,6125$$

Dette resultat vil sige, at på grund af investorens høje totale formue i forhold til hans finansielle formue (som er lavt korreleret med hans human kapital), bør han ideelt set investere lidt over halvdelen af sin finansielle formue i aktier.

Da der er en lav korrelation mellem human kapital og finansiell formue, og mellem fast ejendom og finansiell formue, og at denne vil tillægges en større vægt end korrelation mellem gæld og finansiell formue, vil den optimale aktieandel af finansiell formue forventes at stige hvis man inkluderer fast ejendom og gæld på fast ejendom i modellen. Dette er nøjagtig hvad der sker hvis man regner optimal aktieandel ud i den udvidede model i (36):

$$\alpha^*_{30} \text{ (udvidet model)} = 1,7375$$

Af disse to resultater kan man se at optimal aktieandel har steget med 184 % ved at inkludere fast ejendom og gæld på fast ejendom. I dette tilfælde skal investor investere hele sin finansielle formue i aktier, da det antages at han alligevel ikke kan investere mere end sin finansielle formue i aktier.

Specielt for ældre investorer med en høj korrelation mellem human kapital og finansiell formue forventes den udvidede model at have betydning – disse har en meget lav forventet

human kapital, en høj finansiell formue, samt lav (eller ingen) gæld. Dette kan ses ved at illustrere med et nyt eksempel, hvor investor er 60 år, og har en human kapital på 2 mio. Han forventes at have en finansiell formue på 0,5 mio., værdi i fast ejendom på 5 mio., samt ingen gæld. Alle andre parametre er uændret. I dette tilfælde bliver de to optimale aktieandele følgende:

$$\alpha^*_{60} \text{ (klassisk model)} = 0,2725$$

$$\alpha^*_{60} \text{ (udvidet model)} = 2,3975$$

Her ses det at investor med den nye model skal investere hele sin finansielle formue i aktier, mens han med den gamle kun burde investere 27 % af sin finansielle formue i aktier – dermed medfører den nye model en øgning i optimale aktieandel på 780%. Den udvidede model viser i dette tilfælde at inkludering af fast ejendom i porteføljeanalysen kan have store konsekvenser.

4.3.3 Puzzle fra klassisk teori

Som tidligere nævnt, følger investorer i det virkelige liv ikke altid den klassiske porteføljemodel. Årsagerne til dette kan være mange, men en af de potentielle forklaringer kan være at fast ejendom ikke indgår i den klassiske model. Ved at bruge den udvidede model for forskellige personlige præferencer, kan det undersøges om inkludering af fast ejendom kan forklare et af de tre puzzles – at de fleste investorer øger deres aktieandel eftersom de ældes i stedet for at reducere den.

I den udvidede model er der flere individuelle parametre der øger den optimale aktieandel: Human kapital og fast ejendom med negativ korrelation med finansiell kapital, positiv korrelation mellem gæld og finansiell kapital, samt reduceret risiko aversion. Hvis man antager at korrelationerne er konstante gennem investors liv, sidder man tilbage med human kapital, fast ejendom og reduceret risiko aversion. I tillæg har finansiell formue en påvirkning på optimal aktieandel – jo lavere denne er i forhold til human kapital og fast ejendom, jo højere er aktieandelen.

De fleste unge investorer der lige har begyndt på deres arbejdsliv, har lav finansiell formue, høj human kapital, samt en høj gæld. De vil også, hvis de har gæld, have en høj værdi af fast

ejendom. Denne antages at være noget højere for en ældre investor, der har skiftet sit hus ud som ung til fordel for et større hus når han stifter familie. Samtidig vil den ældre investor have en højere finansiell formue, en meget lavere human kapital, samt en lav eller ingen gæld. Risiko aversionen kan både stige og synke i løbet af investors liv – afhængig af investors personlighed og erfaringer – men i udgangspunktet antages en konstant risiko aversion.

I forhold til en ung investor med høj human kapital, lav finansiell kapital, høj gæld og en relativt lav værdi på fast ejendom, vil det derfor være nødvendigt for den ældre investor – for at opnå en højere optimal aktieandel – at have en betydeligt højere husværdi og ingen gæld på den faste ejendom. Dette for at kompensere for den lavere aktieandel der følger som et resultat af den reducerede human kapital.

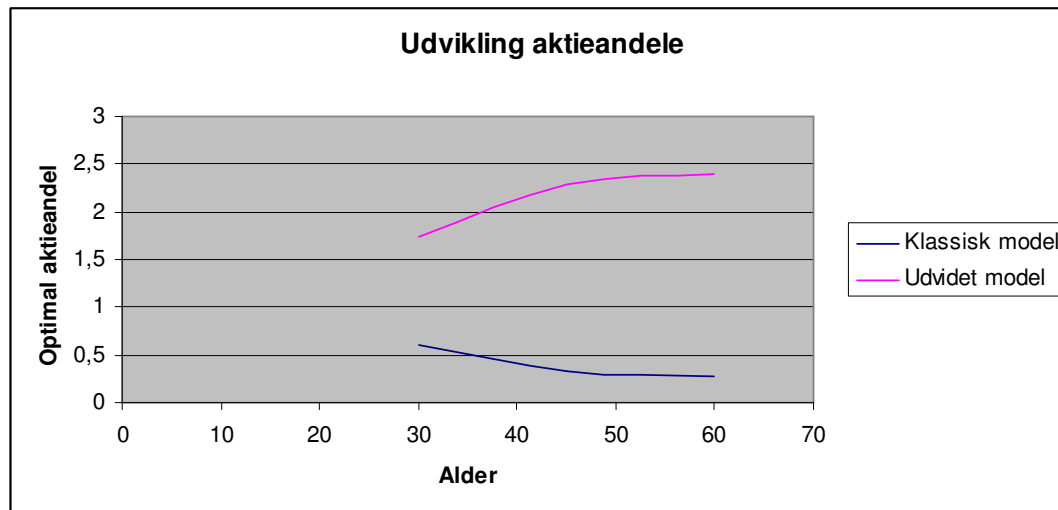
I tillæg kan der godt ske at investor bliver mindre risiko avers eftersom han ældes, eller at hans korrelation mellem arbejdsindkomst og finansiell kapital bliver lavere. Hans optimale aktieandel bliver også relativt højere end for den unge investor hvis korrelationen mellem gæld og finansiell formue er negativ nok.

Ved at bruge forskellige tal for de to investorer, kan man bruge den udvidede model til at finde ud hvad der skal til for at den gamle investor opnår en højere optimal aktieandel end den unge.

I tabel 21 kan de optimale aktieandele for investorerne fra eksemplet i afsnit 4.3.2 ses, både med den klassiske og den udvidede model. I tillæg er de optimale aktieandele udregnet for en investor mellem de to, med alder 45. Det der kan ses af denne tabel, er at portefølje puzzleet fra almindelig investeringspraksis er løst. Den klassiske porteføljemodel forudsiger med nævnte antagelser for investorerne at den optimale aktieandel synker eftersom investor ældes, mens aktieandelene med den udvidede model stiger når investor bliver ældre. Altså kan det, for de nævnte parametre, konkluderes med at årsagen til forskellen mellem teori og praksis i porteføljeanalyse meget godt kan være et resultat af at fast ejendom ikke er inkluderet i den klassiske porteføljemodel.

Investor	Alder	Klassisk model	Udvidet model
Ung investor	30	0,6125	1,7375
Mellem investor	45	0,329	2,2875
Gammel investor	60	0,2725	2,3975

Tabel 21: Udvikling i optimale aktieandele – klassisk og udvidet model. Udregningen kan ses i vedlæg 2.1: Regnearket "Klassisk og udvidet model".



Figur 10: Udvikling i optimale aktieandele – klassisk og udvidet model.

Overraskende nok har korrelationen mellem fast ejendom og finansiel kapital samme påvirkning på løsningen som korrelationen mellem gæld og finansiel kapital – en højere korrelation mellem fast ejendom/gæld på fast ejendom og finansiel kapital resulterer i en relativt højere aktieandel for den unge investor i forhold til den gamle. Dette fordi en ung investor vil have en høj gæld samt en lav værdi på fast ejendom, mens en ældre investor har en høj værdi på sin bolig og en lav værdi på gælden.

Der undersøges modellens egenskaber til at løse de tre puzzles videre i afsnit 5.6.

4.4 Konklusion

Den klassiske porteføljemodel kan udvides med både fast ejendom og gæld på fast ejendom for at bedre reflektere investors individuelle, økonomiske forhold. Ved at gøre dette, kan en investors optimale aktieandel – alt andet givet – ændres drastisk. Specielt for ældre investorer

som har en lav human kapital kan denne udvidelse have meget høj betydning – i eksemplet i afsnit 4.3.2 gik en 60 år gammel investor fra en optimal aktieandel på 0,2725 i den klassiske model til en andel på 2,3975 med den udvidede model.

Ved at inkludere fast ejendom og gæld på fast ejendom i den klassiske porteføljemodel, kan man derfor forklare, i det mindste delvis, hvorfor investorer i det virkelige liv faktisk investerer mere i aktier eftersom de ældes – modsat af det klassiske investeringsråd – dog med nogle betingelser. Blandt andet skal korrelationen mellem human kapital og finansiel kapital ikke være for lav. Hvis denne er meget negativ, vil den unge investor have en højere optimal aktieandel end den gamle investor. Tilsvarende vil den unge investor have en højere optimal aktieandel hvis korrelationerne mellem fast ejendom/gæld på fast ejendom og finansiel kapital er høje nok.

I tillæg skal den finansielle kapital for den ældre investor ikke være for høj – ved en ekstremt høj finansiel kapital i forhold til den yngre investor, bliver værdien nemlig i fast ejendom og human kapital i forhold til finansiel kapital desto mindre, og aktieandelen vil være lavere end for en ung investor.

På basis af disse forhold kan det derfor konkluderes med at den udvidede model delvis kan forklare hvorfor virkelige investorer går på tværs af det klassiske investeringsråd, men med meget strenge betingelser.

Bemærk at dette gælder for en negativ/meget lav korrelation mellem human kapital og finansiel formue. Hvis en investor har en meget høj korrelation mellem disse to aktiver, vil det ikke være nødvendigt at udvide den klassiske model for at se de mønstre der kan observeres i virkelige markeder.

Bemærk også at den udvidede model kun er et intuitivt forslag, og ikke bygger på dybere undersøgelser. Dette vil være nødvendigt for at sikkert kunne sige, hvad der er årsagen til de observerede aktiebeholdninger hos virkelige investorer.

5 Sammenligning af Cocco og udvidet Lund Larsen model

I dette afsnit vil den udvalgte regression fra afsnit 3 – Cocco (2002) – sammenlignes med den i afsnit 4 udvidede Lund Larsen model. Der vil undersøges om disse genererer samme aktieandele for investorer med samme præferencer, og der vil forsøges at konkludere med hvorvidt den udvidede Lund Larsen model er i stand til at løse de tre puzzles fra afsnit 1.2 – med Coccas parameterverdier.

5.1 Regressioner til sammenligning

Coccos (2000) genererer 3 regressioner (både for modellen og dataene) der forklarer investors optimale aktieandel – i forhold til likvide aktiver (LA), finansielle aktiver (FA) og totale aktiver (TA). Det vil kun ses på aktier over likvide aktiver ved sammenligning med den udvidede Lund Larsen model.

For at kunne undersøge om Lund Larsen kan forudsige aktieandele der stemmer mere overens med virkelige investorer end den klassiske model, benyttes regressionen forudsagt af dataene i Cocco for at sammenligne. Regressionen er følgende:

$$(S/LA)_i = -0,257 + 3,43e-06INC_i + 7,39e-08FNW_i + 0,002AGE_i - 0,360REFNW_i + 0,355MORTFNW_i - 0,373BUFNW_i + \delta_i \quad (37)$$

der $BUFNW$ = værdi af forretningsmidler/nettoværdi. Der antages at denne er nul for alle investorer.

Af (37) kan det ses at både indkomst, finansiell nettoværdi, alder og gæld over finansiell nettoværdi positivt påvirker investors aktieandel. I modsætning vil fast ejendom over finansiell nettoværdi påvirke andelen negativt. De to variable $REFNW$ og $MORTFNW$ vil have en meget højere vigtighed for aktieandelen end de resterende variable.

Den udvidede Lund Larsen model udviklet i afsnit 4 ser ifølge (36) sådan ud:

$$\alpha^* = \frac{\left[\begin{array}{c} \mu - r_f + \sigma^2/2 \\ \gamma\sigma^2 \end{array} \right]}{\left[\begin{array}{ccc} 1 & & \\ + \frac{H}{F} & + \frac{E}{F} & - \frac{G}{F} \end{array} \right]} - \left[\begin{array}{cc} H & \sigma_{H,F} \\ F & \sigma^2 \end{array} \right] * \left[\begin{array}{cc} E & \sigma_{E,F} \\ F & \sigma^2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} G & \sigma_{G,F} \\ F & \sigma^2 \end{array} \right] \quad (36)$$

Af (36) ses det, at optimal aktieandel afhænger af forholdene mellem human kapital/kapital i fast ejendom/gæld og finansiell formue, samt korrelationerne mellem disse – lav korrelation vil for human kapital og fast ejendom øge aktieandelen, mens reducere den for gæld. I tillæg vil optimal aktieandel afhænge af risikopræmie på aktier, risiko på aktier, samt investors risiko aversion.

I Cocco er den afhængige variabel aktier/likvide aktiver, mens den i den udvidede Lund Larsen model er $\alpha^* = \text{aktier/finansiell formue}$. Likvide og finansielle aktiver vil her være betegnelsen på de samme aktiver, da Lund Larsen beskriver finansiell formue som de aktiver man kan investere i aktier eller det risikofri aktiv (Lund Larsen, 2007, boks 1). Den afhængige variabel vil derfor være den samme for de to modeller.

5.2 De to modellers forskelle og konklusioner

Det er vigtigt, at mærke sig at Cocco og den udvidede Lund Larsen model skiller sig fra hinanden på følgende måde: Cocos regression er en *positiv* regression – det vil altså sige, at den forklarer hvordan investorerne i det virkelige liv investerer sin finansielle kapital. I modsætning er modellen udviklet i Campbell og Viceira (2002), samt beskrevet i Lund Larsen (2007) en *normativ* model. Dette betyder, at den udregner den teoretisk set optimale aktieandel for en givet investor. Den udvidede Lund Larsen model forventes derfor også at være en normativ model.

Den udvidede models forudsagte aktieandel kan derfor skille sig fra Cocco. Årsagerne kan være irrationelle investorer, omkostninger i det virkelige liv der ikke er inkluderet i den normative model, osv.... Hvad dette kan betyde for de to modellers forudsagte aktieandel, vil blive diskuteret videre i afsnit 5.5.

For ændrede værdier af variable som for eksempel risikopræmien på aktier, aktiernes risiko, investors risiko aversion, korrelation mellem de enkelte aktiver, osv., vil Cocos regression

generere andre koefficienter end i (37). I den udvidede Lund Larsen model vil dette være meget nemt at justere for, da disse variabler indgår direkte i modellen, og modellen vil ikke ændres. Den udvidede Lund Larsen model vil derfor være nem at anvende i tilfælde variablerne ændrer sig.

Den udvidede Lund Larsen model indeholder ikke alder eller arbejdsindkomst som en variabel – i modsætning til Cocco. Cocco indeholder derimod ikke human kapital, som indgår i Lund Larsen. Alligevel forventes det at disse to forhold udligner hinanden – alder og arbejdsindkomst giver et estimat på investors forventede human kapital, og denne forskel forventes dermed ikke at generere store forskelle.

Cocco inkluderer i sin model blandt andet en fast omkostning på \$1 000 for at deltage i aktiemarkedet, og det er derfor forventet at investorerne i udvalget – der genererer (37) – også betaler denne omkostning ved aktiehandel. Dette er noget den udvidede Lund Larsen model ignorerer. De to modeller kan derfor generere meget forskellige resultater, specielt for investorer med lav nettoværdi, der ikke har råd til at betale den faste omkostning.

Cocco konkluderer med at de likvide aktier bliver holdt lave tidlig i en investors liv, og for lave værdier af finansiell nettoværdi på grund af fast ejendom. Fordelene ved at deltage i aktiemarkedet reduceres dermed, og aktiebeholdningerne til private investorer vil øge gennem livet. Regressionen forklarer også at risiko i huspriserne reducerer investorers aktiebeholdninger, samt at aktiebeholdninger øger med gæld på fast ejendom.

Den udvidede Lund Larsen model har nogenlunde samme konklusion, dog med nogle betingelser. Blandt andet skal ikke korrelationen mellem arbejdsindkomst og aktieafkastet være for lav, og korrelationerne mellem fast ejendom/gæld på fast ejendom og aktieafkastet skal ikke være for høje. I tillæg skal den finansielle kapital for den ældre investor ikke være for høj – i dette tilfælde bliver værdien i fast ejendom og human kapital i forhold til finansiell kapital desto mindre, og aktieandelen vil være lavere end for en ung investor.

5.3 Datamateriale eksempel-investorer

I dette afsnit vil der vælges ud datamateriale til sammenligningen mellem de to modeller. Disse dataer vil indeholde teoretiske eksempel-investorer, der kun skiller sig fra hinanden med følgende parametre: Alder, arbejdsindkomst, human kapital, likvide aktiver, værdi i fast ejendom og gæld på fast ejendom. Risiko aversion og korrelationer mellem aktiverne vil være de samme for alle investorer – aktiers risikopræmie og risiko på aktier vil også være uændret for alle investorer.

Udvalget vil indeholde investorer der er meget forskellige i alle variable – specielt alder og nettoværdi. Dette for at undersøge hvordan de to modeller løser puzzleet fra klassisk porteføljetheori. I tillæg vil der undersøges hvilke forskelle i aktieandele der forudsiges for investorer med og uden fast ejendom. Dette for at forsøge at understrege vigtigheden af, at inkludere denne type kapital i porteføljemodeller.

Datamateriale vil bestå af 20 investorer, med alle typer kombinationer af de valgte variable. Den yngste investor i udvalget vil være på 25 år – på samme alder som Cocco antager at investor begynder sit liv. Ifølge Cocco lever investor til han er 75, og den ældste investor i udvalget vil derfor ikke blive ældre end dette. Investorerne vil gå fra en finansiell formue/likvid kapital på 0 – 2 000 000, samt en fast ejendom på 1 500 000 – 3 500 000. Investorerne gæld forventes at spænde fra 0 – 1 500 000, da det antages, at en investor med en høj værdi i fast ejendom enten er så velstående eller så gammel at han har betalt det meste af sin gæld ned. Investorerne arbejdsindkomst vil ligge i området fra 300 000 – 1 000 000, men det forventes at kun ældre investorer (45 og ældre) vil kunne opnå de højeste indkomster. Arbejdsindkomsten vil forventes at stige noget for alle investorer – dette er inkluderet i investors human kapital. I Cocco bliver dataudvalgets investorer arbejdsindkomster diskonteret med 5%, og dette vil derfor også gælde investorerne i dette afsnits udvalg. For at tage hensyn til investors forventede vækst i arbejdsindkomst – som antages at ligge på rundt 1% hvert år – bliver den effektive diskonteringsrente lig med 4%. De diskonterede arbejdsindkomster bliver så summeret, og giver dermed investors human kapital. Pensionsalderen antages, som i Cocco, at være 65 år. Efter fyldte 65 vil investor ikke have noget human kapital tilbage, men vil have en arbejdsindkomst på 80% af sin arbejdsindkomst i sit sidste arbejdsår.

De øvrige variable, der er de samme for alle investorer, er valgt på basis af Cocco (2002). Disse parametre kan ses i tabel 1. Cocco antager i sin model et aktieafkast på 10%, samt en standardafvigelse på 16,74%. Med en antaget risikofri rente på 2%, bliver risikopræmien på aktier 8%. Investorenes risiko aversion er sat til 5 i Cocco, og vil derfor også blive benyttet i denne analyse. Videre er korrelationen mellem arbejdsindkomst og aktieafkast sat til nul. Korrelationen mellem afkast på fast ejendom og aktieafkast, samt mellem gæld og aktieafkast, er ikke specificeret i Cocco, og antages derfor at være henholdsvis 0,05 og -0,05, som i afsnit 4.

Investor	Alder (AGE)	Arbejds- indkomst (INC)	Human kapital (H)	Likvide aktiver (F) el. (LA)	Værdi fast ejendom (E)	Gæld fast ejendom (G)	Finansiell nettoværdi (FNW)
1	25	400 000	7 917 110	40 000	1 500 000	1 500 000	40 000
2	27	300 000	5 810 359	80 000	1 600 000	1 500 000	180 000
3	29	450 000	8 508 727	150 000	1 800 000	1 400 000	550 000
4	30	450 000	8 399 076	160 000	1 850 000	1 300 000	710 000
5	34	450 000	7 914 822	200 000	2 000 000	700 000	1 500 000
6	37	350 000	5 832 072	150 000	1 700 000	800 000	1 050 000
7	40	650 000	10 154 352	400 000	2 400 000	600 000	2 200 000
8	44	600 000	8 670 669	600 000	2 800 000	550 000	2 850 000
9	45	600 000	8 154 196	600 000	2 800 000	500 000	2 900 000
10	48	700 000	8 515 968	700 000	3 000 000	300 000	3 400 000
11	50	550 000	6 115 113	400 000	2 900 000	400 000	2 900 000
12	52	500 000	4 992 824	700 000	3 500 000	200 000	4 000 000
13	56	350 000	2 602 366	200 000	1 500 000	500 000	1 200 000
14	60	700 000	3 116 276	1 500 000	2 800 000	100 000	4 200 000
15	63	1 000 000	1 886 095	2 000 000	3 500 000	0	5 500 000
16	65	640 000	0	800 000	3 300 000	0	4 100 000
17	68	560 000	0	1 600 000	3 000 000	50 000	4 550 000
18	70	400 000	0	800 000	3 200 000	0	4 000 000
19	72	800 000	0	1 700 000	3 500 000	0	5 200 000
20	75	320 000	0	600 000	2 500 000	0	3 100 000

Tabel 22: Udvalg af investorer til analyse.

Udvalget af investorer kan ses i tabel 22. Optimale aktieandele vil så regnes ud for disse investorer med begge modeller – (36) og (37) – samt den klassiske model i (35). Denne analyse kan ses i vedlæg 2.2 – Regnearket ”Analyse”. Resultaterne vil diskuteres i afsnit 5.4.

5.4 Resultater analyse

Alle resultater af analysen kan ses i tabel 23. Disse resultater vil i dette afsnit diskuteres – først med hensyn til alder, så med hensyn til velstand (FNW). Årsagerne til denne opdeling er de tre puzzles nævnt i afsnit 1.2 – at investorer ikke reducerer deres aktieandel eftersom de ældes, eller eftersom de oplever en højere velstand. Indenfor hvert af de to områder vil alle tre modeller sammenlignes – først Cocco med den klassiske model, dermed den udvidede Lund Larsen model med den klassiske model, og til sidst Cocco med den udvidede Lund Larsen model.

Investor	Klassisk	Lund Larsen	Cocco
1	21,03	17,28	0,98
2	7,78	5,98	0,60
3	6,10	5,32	1,11
4	5,65	5,03	1,11
5	4,29	4,30	1,15
6	4,22	4,02	0,78
7	2,79	2,89	1,92
8	1,63	1,75	1,81
9	1,54	1,67	1,82
10	1,39	1,56	2,20
11	1,72	1,97	1,63
12	0,86	1,09	1,56
13	1,48	1,51	0,84
14	0,33	0,42	2,34
15	0,21	0,30	3,48
16	0,11	0,34	2,08
17	0,11	0,21	1,90
18	0,11	0,33	1,26
19	0,11	0,22	2,77
20	0,11	0,34	0,93

Tabel 23: Aktieandele for investorer i udvalg – forudsagt af de tre modeller.

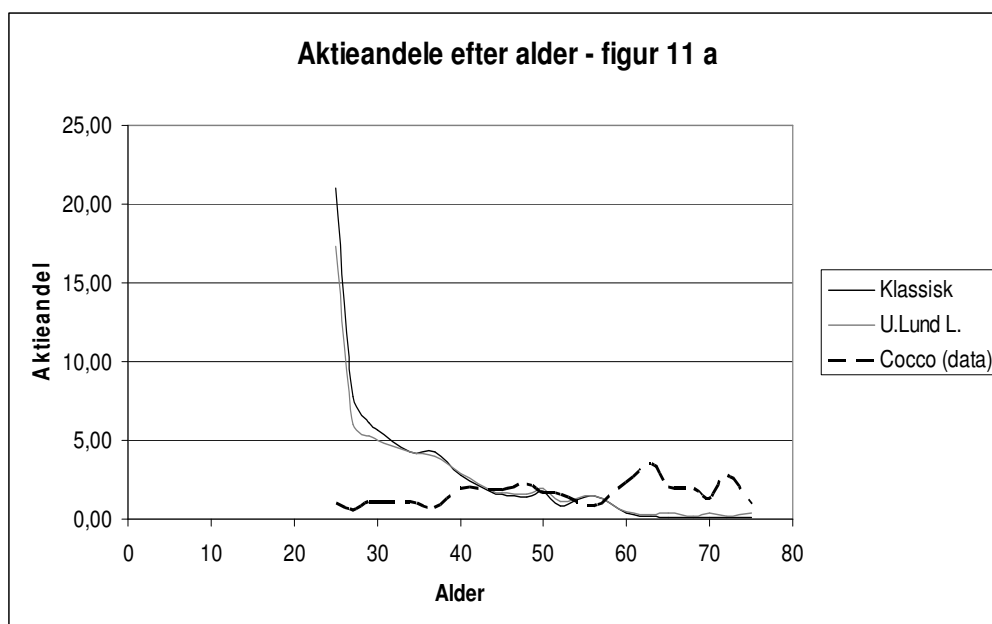
5.4.1 Porteføljevægte efter alder.

To af de tre kompositions puzzles fra afsnit 1.2 gælder alder. Unge investorer holder ikke en 100% aktieandel, og denne reduceres ikke eftersom de ældes.

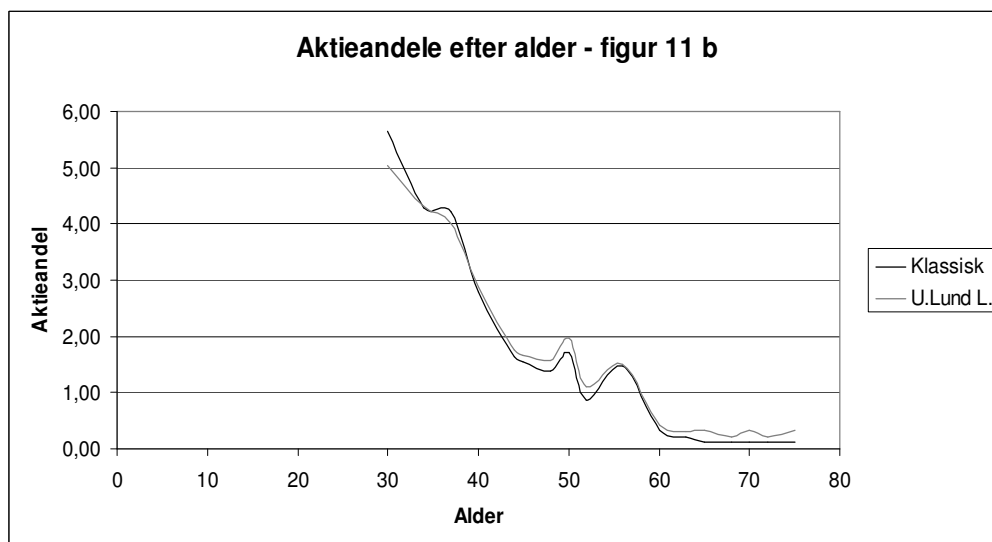
Porteføljevægtene efter alder forudsagt af de tre modeller kan ses i figur 11 a. Denne viser, at hvor den klassiske model forudsiger reducerede aktieandele eftersom investor ældes, forudsiger de virkelige investorer fra Cocco det modsatte. Ifølge disse stiger aktieandelen eftersom investors alder øges, og bekræfter dermed et af de to alders-puzzles. I tillæg kan det ses, at puzzlet der fremgår af, at virkelige investorer ikke holder 100% af deres likvide aktiver

i aktier som unge, også bekræftes i figur 11 a. Ifølge Cocos regression holder den yngste investor kun en aktieandel på 98%, i modsætning til en andel på 2103% ifølge den klassiske model.

Figur 11 a viser også, at for de gældende variable, vil den klassiske Lund Larsen model give omtrent samme resultat som den udvidede model. De optimale aktieandele for yngre investorer vil ligge helt op til 20 (2000%), og yngre investorer skal derfor, ifølge den udvidede Lund Larsen model, holde alle sine likvide aktiver i aktier. Derefter skal denne aktieandel reduceres eftersom investor ældes, og ved en alder på 75 vil den nærme sig nul – 0,11 for den klassiske model, ca. 0,2 for den udvidede Lund Larsen model.



Figur 11 a): Aktieandele efter alder – ifølge de tre modeller – for alle aldre.



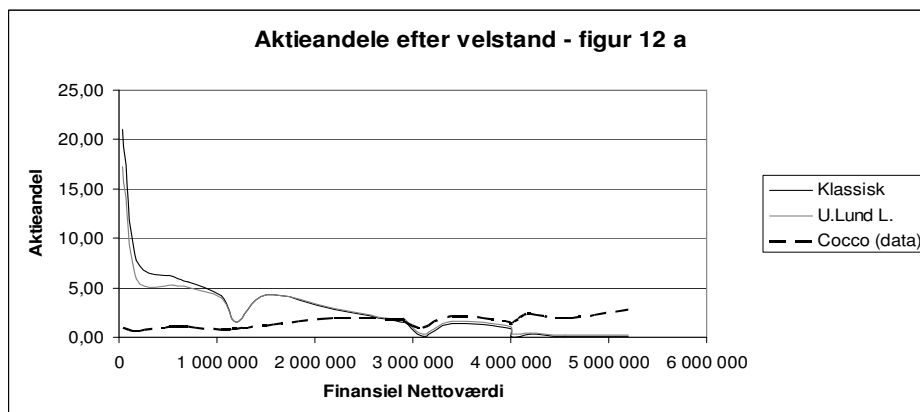
Figur 11 b): Aktieandele efter alder for alderen 30 – 75 – klassisk og udvidet model.

Imidlertid kan der ses en forskel på de to modeller, som forklarer noget af årsagen til at virkelighedens investorer går på tværs af det klassiske investeringsråd. Som det kan ses af figur 11 b – hvor de yngste investorer er fjernet for at tydeliggøre forskellen – vil aktieandelene forudsagt af den udvidede model for investorer op til en alder af 40 ligge under de forudsagt af den klassiske model. Når investor fylder 40, vil dette mønster så vende, og aktieandelene forudsagt af den udvidede model vil ligge over de forudsagt af den klassiske model. Dette fører til at aktieandelene ifølge den udvidede model ligner virkelighedens investeringsmønster mere end det teoretiske.

I forhold til Cocco vil den udvidede model derfor forudsige en meget højere aktieandel for unge investorer. Ifølge den udvidede model skal investor holde hele sin likvide formue i aktier, mod kun 0,98 ifølge Cocco. De to modeller vil forudsige omtrent samme aktieandele for investorer i alderen 44 – 60, men dette gælder også for den klassiske model i forhold til Cocco. Den udvidede model vil alligevel ligge nærmere Cocco end hvad den klassiske porteføljemodel gør. Aktieandelene forudsagt af den udvidede model vil ikke ligge så højt i forhold til Cocco, som den klassiske model gør for investorer i en alder op til 40, og for ældre investorer vil den ikke ligge så lavt i forhold til Cocco som den klassiske. At inkludere fast ejendom og gæld på fast ejendom har dermed ført til en forbedring i forhold til den klassiske model.

5.4.2 Porteføljevægte efter velstand

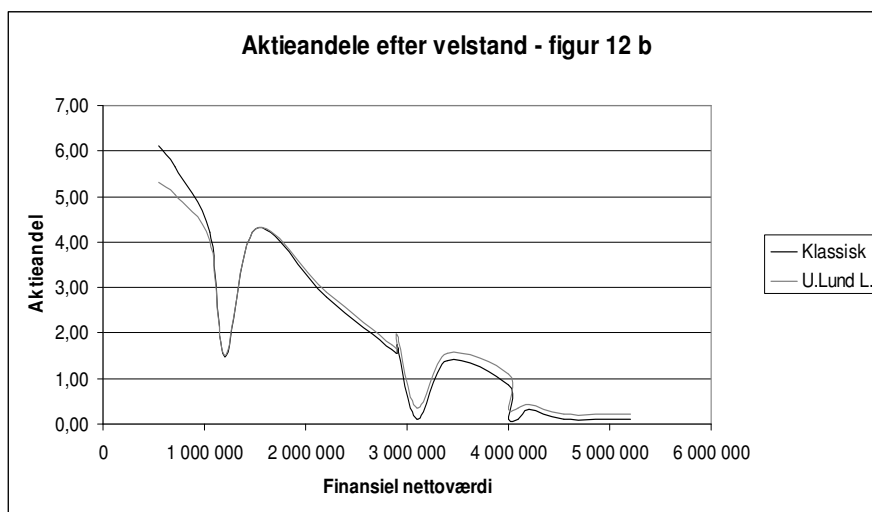
Figur 12 a – b viser de forudsagte aktieandele for alle tre modeller, sorteret efter stigende FNW. FNW bliver her defineret som velstand, og puzzlet fra klassisk teori er at investorer ikke reducerer sin aktieandel eftersom deres velstand stiger, men derimod øger den.



Figur 12 a): Aktieandele efter velstand – forudsagt af de tre modeller – for alle FNW.

Den klassiske model forudsiger som ventet en reduceret aktieandel når investor oplever øget velstand. Den optimale aktieandel synker fra over 2000% ved en nettoværdi på 40 000 til kun 11% når investors nettoværdi øger til 5,5 mio. Cocco forudsiger derimod følgende mønster i aktieandelene: Ved den laveste nettoværdi er aktieandelen på 0,98, men denne stiger til 3,48 (altså 348% af den likvide formue) når nettoværdien er på det højeste i udvalget. De to modeller giver omtrent den samme aktieandel når investor har en nettoværdi på lige under 3 mio.

Dette bekræfter dermed det tredje kompositions puzzle – at investorer med høj nettoværdi også holder en høj aktieandel, modsat af den klassiske teori.



Figur 12 b): Aktieandele efter velstand for FNW 550 000 til 5 200 000 – klassisk og udvidet model.

Som nævnt forudsiger den klassiske porteføljemodel en reduceret aktieandel ved øget nettoværdi. Dette er også hvad den udvidede model giver. Investors optimale aktieandel ifølge denne model ligger på omtrent 17,28 ved en finansiell nettoværdi på 40 000, og reduceres til 0,3 når investor opnår en nettoværdi på 5,5 mio. Investorer med lav velstand, typisk unge investorer, anbefales derfor i henhold til denne model, at holde hele sin likvide formue i aktier.

Den udvidede model ligger altså, som for aktieandel efter alder, noget nærmere Cocos forudsagte aktieandele end den klassiske model. Dette ses tydeligere i figur 12 b, hvor de laveste værdier for nettoværdien er fjernet for at tydeliggøre forskellen mellem den klassiske og udvidede model. Af denne ses det, at den udvidede model anbefaler investor at holde en lavere aktieandel ved de laveste værdier af finansiell nettoværdi – for en nettoværdi på 550 000, anbefaler den udvidede model at holde en aktieandel på 5,32, mod den klassiske

models anbefaling på 6,1. Ved højere nettoværdi vil dette mønster vende, og for de mest velstående investorer vil den udvidede model forudsige en optimal aktieandel på 0,3, mod 0,21 ifølge den klassiske model. De to modeller anbefalede aktieandele vil krydse hinanden på en nettoværdi rundt 1 mio.

Den udvidede model vil altså ligge noget nærmere Cocco end den klassiske model. For investorer med en lav nettoværdi vil modellen ligge meget højere – dog ikke så meget højere som den klassiske model – end Cocco, og modsat for investorer med en høj nettoværdi. De to modeller forudsiger omtrent samme aktieandel for en nettoværdi på lige under 3 mio, men noget højere end der den klassiske model og Cocco krydser hinanden. Inkluderingen af fast ejendom i den klassiske model, har dermed ført til en forbedring i forhold til forskellen mellem denne model og virkelige investorer (Cocco).

Af figurene 11 – 12 fremgår det, at der med de forudsagte aktieandele følger en meget høj varians. Specielt de forudsagte andele ifølge Cocco, sorteret efter alder, har en meget høj variation. Den yngste investor i udvalget vil holde en aktieandel på 0,98, den næst ældste 2,77, mens den ældste kun 0,93. Også den klassiske og udvidede model vil have en relativt høj variation i figur 12 b, der investorer med en nettoværdi på for eksempel 1,2 mio., vil holde en meget lavere aktieandel end investorerne lige over og under dem.

Selv om dette kan være på grund af modellerne, er det mere realistisk at antage, at dette er en følge af det lave antal investorer i analysens udvalg. Udvalget indeholder kun 20 investorer, og et virkelig udvalg på mange tusinde gange større vil sandsynligvis give meget mere jævne kurver, og dermed reducere den høje varians. Investorerne i udvalget er i tillæg fiktive, og virkelige investorer vil måske have et meget anderledes forhold mellem variablerne i tabel 22. For at sikkert kunne sige, hvordan de forudsagde aktieandele vil se ud for de tre modeller, er det derfor nødvendig med et meget større udvalg end 20 investorer, med investorer fra det virkelige marked.

5.5 Årsager til forskelle mellem de to modeller

Resultaterne for den udvidede Lund Larsen model og Cocos model fra virkelige data er som nævnt i forrige afsnit ikke identiske. Selv om den udvidede model nærmer sig Cocco i forhold

til den klassiske model, er der stadig forskelle mellem de to modeller, og i dette afsnit peges der på et par eksempler på hvad der kan være årsagen til disse forskelle.

Det lave udvalg af investorer nævnt i afsnit 5.4 kan, i tillæg til at være årsagen til den høje variationen i aktieandelene, også føre til at modellernes forudsagte aktieandele ikke ligger på samme niveau. Der er også en mulighed for at virkelighedens investorer ikke vil have samme formueelementer som de i udvalget, og resultaterne vil dermed blive noget anderledes. Dette kan føre til at de to modeller vil give resultater, der ligner hinanden mere. Imidlertid vil dette sandsynligvis også resultere i at den klassiske models aktieandele nærmer sig de virkelige investorer.

I udviklingen af Cocos model inkluderes en fast omkostning på \$1 000 for at deltage i aktiemarkedet. Det forventes derfor at de virkelige investorer i Cocos udvalg også betaler denne ved aktiehandel. Da denne er en engangsomkostning som betales første gang investor deltager i aktiemarkedet, vil denne føre til en lavere aktieandel for investorer med ung alder og lav FNW. Disse har ikke høje nok likvide midler til at betale den faste omkostning.

Den udvidede model inkluderer ikke en sådan omkostning, så det forventes at aktieandelene, forudsagt af Cocco for yngre og mindre velstående investorer, vil være lavere end forudsagt af den udvidede model. Dette er nøjagtig hvad der ses i figurene 11 og 12.

Når investorer bliver rigere og ældre og betaler omkostningen, vil den derefter ikke have nogen betydning. Måske vil den til og med holde aktieandelene højt på grund af investorenes uvillighed til at "smide penge ud af vinduet", og vil dermed føre til nøjagtig den forskel der ses mellem den udvidede model og Cocco.

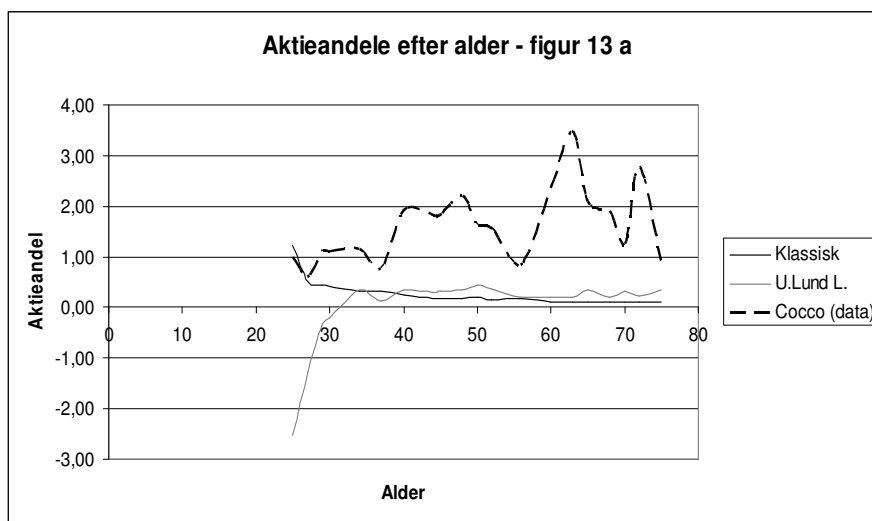
Som nævnt er den faste omkostning ignoreret i den udvidede model. Ved en inkludering af denne vil denne og Cocco sandsynligvis nærme sig hinanden mere, og den udvidede model vil dermed i højere grad forklare de virkelige investorers handlingsmønstre.

En tredje forklaring på forskellene mellem de to modellers resultater kan være de valgte korrelationer mellem de forskellige formueelementer. For eksempel er korrelationen mellem arbejdsindkomst og aktier sat til nul i Cocos model, og det er dermed også antaget at de virkelige investorer i Cocco har en korrelation på nul. Ved udregning af optimale aktieandele for den udvidede model, er tilsvarende lavet for bedst mulig sammenligning.

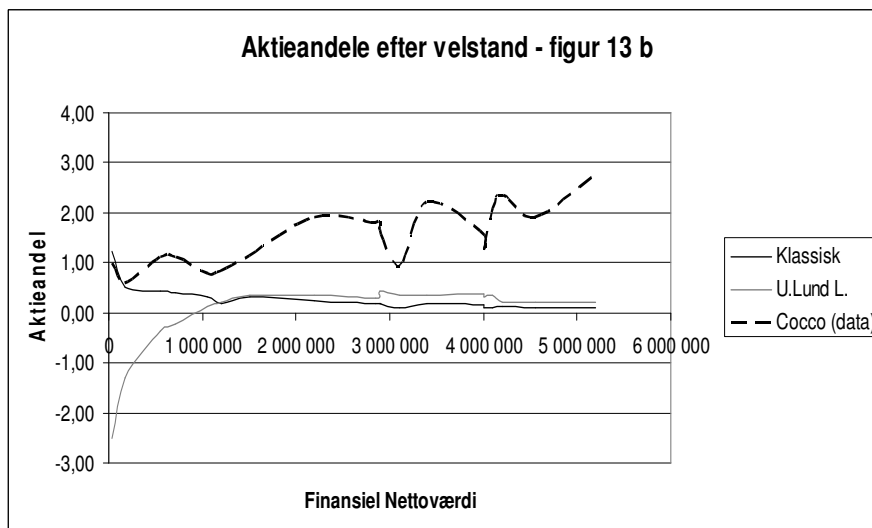
Imidlertid kan det godt være at de virkelige investorer i Cocco slet ikke har en korrelation mellem løn og aktier på nul. Som nævnt i afsnit 4.3.2, viser empiriske studier at korrelationen

mellem arbejdsindkomst og aktier enten er nul eller mellem 0,3 – 0,5. Det kan derfor være at den valgte korrelation i den udvidede model ikke stemmer overens med den fra Cocco, og dermed skaber en forskel mellem teori og data. For at undersøge dette, vælges en middelværdi af 0,0 og 0,3 – 0,1.

Det kan ses af figur 13 a og b at ved en korrelation mellem lønindkomst og aktier, vil den udvidede model optimale aktieandele følge samme mønster som Cocco – dog noget lavere. Ifølge disse figurer vil både unge og mindre velstående investorer holde en aktieandel på nul – noget man ofte ser hos virkelige investorer. En højere korrelation mellem løn og aktier kan derfor føre til at den udvidede model ligner virkelige investorer meget mere.



Figur 13 a): Aktieandele sorteret efter alder ved korrelation mellem løn og aktier = 0,1.



Figur 13 b): Aktieandele sorteret efter velstand ved korrelation mellem løn og aktier = 0,1.

De valgte estimater for de resterende variable kan også føre til forskelle mellem de to modeller. For eksempel kan den gennemsnitlige, virkelige investor have en højere eller lavere risiko aversion. Korrelation mellem de resterende aktiver – human kapital og fast ejendom, human kapital og gæld, fast ejendom og gæld – kan være højere eller lavere end nul. Det valgte afkast og risiko for aktier kan være forkert i forhold til de virkelige investorer, og den risikofri rente kan være både højere og lavere. Alle disse forhold ville have ført til et anderledes forhold mellem de to modeller, og bør undersøges dybere i en eventuel videre undersøgelse.

5.6 Den udvidede models egenskaber til at løse puzzles

I afsnit 4.3.3 blev den udvidede models egenskaber til at løse et af de tre puzzles – hvorfor investorer holder flere aktier eftersom de ældes – undersøgt, med udgangspunkt i parametrene valgt i afsnit 4.3.2. Konklusionen herfra var at den udvidede model med disse parametre løste puzzleet fra den klassiske teori. I dette afsnit undersøges dette – samt de to resterende – puzzles med de valgte parametre fra Cocco.

Det første puzzle er puzzleet om aktieandelen ved ung alder. Hvorfor holder unge investorer ikke 100% aktier? Dette puzzle bliver bekræftet af Coccas data, som forudsiger en aktieandel på 0,98 for den yngste investor i udvalget. Da udvalget består af fiktive investorer påvirker dette sandsynligvis resultatet, og i tabel 6 vises det at investorer under 35 år holder en aktieandel på kun 12% af likvide midler.

Den udvidede model løser delvist puzzleet med de valgte variable – se figur 11 a – b. Rigtignok holder investorerne ifølge modellen en aktieandel på meget over 1, men de ligger nærmere Coccas kurve end den klassiske gør. Med andre parameterverdier - specielt en noget højere korrelation mellem løn og aktier (se figur 13 a – b) – vil derimod kunne modellen løse puzzleet den klassiske model ikke kunne forklare. Dette på grund af den inkluderede faste ejendom.

Puzzle nummer to stiller spørgsmålet: Hvorfor reduceres aktieandelen ikke eftersom investor ældes hos virkelige investorer? Dette blev undersøgt i afsnit 4.3.3, hvor den udvidede model kunne løse puzzleet for de valgte parametre – specielt en korrelation mellem løn og aktier på 0,26. Med parameterverdierne i afsnit 5.3 bliver puzzleet bekræftet af Coccas data regression,

se figur 11 a. Ifølge denne figur, holder investorerne en lavere aktieandel eftersom de ældes. Den udvidede model løser kun delvist puzzleet – se figur 11 a – b. Af disse kan det ses at modellen forudsiger aktieandele ligner Cocco mere end den klassiske model gør, men alligevel reduceres aktieandelen med alderen. Ved en korrelation på 0,1, derimod, kan man sige, at modellen løser puzzle nummer to.

Det tredje og sidste puzzle der undersøges, handler om aktieandelens afhængighed af investors nettoværdi. Hvorfor reduceres aktieandelen ikke eftersom investor bliver mere velstående, som den klassiske model forudsiger? Puzzleet bliver igen bekræftet af Cocos data regression, se figur 12 a. Ifølge denne holder velstående investorer en højere aktieandel end de investorer med en lavere nettoværdi – modsat af det klassiske råd. Den udvidede model løser også i dette tilfælde kun delvist puzzleet – se figur 12 a – b. Som i de to andre puzzles, ligger modellen nærmere Cocco end det den klassiske model gør, men aktieandelen reduceres stadig med nettoværdi, som i den klassiske. Hvis korrelationen mellem lønindkomst og aktier imidlertid øges til 0,1, ses det af figur 13 b at den udvidede model følger samme mønster som Cocos investorer ville have gjort, dog ligger den noget lavere.

Den udvidede model kan derfor løse alle de tre puzzles ved visse parameterverdier. Ved Cocos valgte parameterverdier løser den ikke de tre puzzles mere end delvist.

Bemærk at investorer ikke altid handler rationelt – selv om dette forudsættes i afsnit 1.3 – og at de derfor ikke altid holder den optimale aktieandel. Derfor kan den udvidede model godt forudsige de optimale aktieandele, selv om de virkelige investorer har en højere eller lavere andel.

Bemærk også at virkelige investorer og andre parameterverdier for risiko aversion, risikopræmie for aktier osv., ville give andre aktieandele som måske ligner virkelige investorers handlingsmønstre mere.

6 Konklusion

6.1 Hvad betyder fast ejendom for den gennemsnitlige investor?

Virkningen af inkludering af fast ejendom i den gennemsnitlige investors porteføljebeslutning kan deles i to: Virkningen for den rationelle investor der handler efter den teoretisk set optimale porteføljeallokering, og virkningen for virkelige investorer. Selv om der antages i denne afhandling at investorerne er rationelle, vil der i virkeligheden være forhold der fører til at få investorer handler optimalt. Eksempler på dette kan være irrationalitet, omkostninger der ikke inkluderes i modellerne, eller investorernes kundskab om deres præferencer. For eksempel kan en investor tage fejl med hensyn til risiko aversion, eller korrelation mellem løn og aktier. Alt dette vil føre til en anden porteføljeallokering end den teoretisk set optimale. Konklusionen på spørgsmålet ovenfor kan derfor deles i to: En konklusion fra Cocco, samt en fra den udvidede Lund Larsen model.

Cocco er en positiv model der beskriver hvilke aktiver investorerne i markedet virkelig holder. Denne model inkluderer blandt andet en fast omkostning for at deltage i aktiemarkedet, og genspejler bedre investorernes virkelige forhold.

Modellens regression for aktier over likvide aktiver forudsiger en negativ koefficient for finansiell nettoværdi og fast ejendom over nettoværdi. Dette betyder, at velstående investorer, samt investorer med høj værdi i fast ejendom, vil holde en lavere aktieandel end investorer med lave værdier af fast ejendom og nettoværdi. Den negative koefficient modsiges af dataene benyttet i Cocco, som forudsiger en positiv koefficient. Dette vil sige, at virkelige investorer øger sin aktieandel eftersom de bliver mere velstående.

Både indkomst, alder og gæld over nettoværdi har ifølge Cocco en positiv koefficient. Altså holder investorer med høj indkomst, alder og gæld en højere aktieandel end andre investorer. Dette støttes af Cocos data. Tilsyneladende virker gældens positive koefficient noget mærkelig, men det forklæres med at investorer der optager en høj gæld, også forventes at have en fremtidig høj indkomst for at kunne betale gælden tilbage. Disse vil derfor være mere velstående, og holder flere aktier.

Ifølge Cocco vil investors ejerskab af bolig derfor holde hans likvide aktiver lave tidlig i livet og for lave værdier af finansiell nettoværdi. Dette forhold, samt den faste

deltagelsesomkostning, reducerer fordelene ved at handle aktier, og investor vil holde en lav aktieandel.

Modellen forklarer også at øget risiko på fast ejendom reducerer investors aktiebeholdning. Dette kan forklares med at investor forsøger at sikre sig mod tab på sin faste ejendom ved at reducere sin risiko i aktieporteføljen. Korrelationen mellem fast ejendom og aktier burde her undersøges, da en perfekt negativ korrelation på denne vil føre til at investor ikke behøver at justere sine aktieandele ved øget hus risiko. Cocos model tager imidlertid ikke hensyn til denne korrelation, eller korrelationen mellem gæld og aktier.

Den teoretiske virkning bliver i denne afhandling udredt af den udvidede Lund Larsen model. Denne model er en normativ model, der skal forudsige hvordan investorer i markedet *bør* investere sin likvide formue, givet de gældende variable og præferencer.

Modellen udvides i forhold til den klassiske model med både fast ejendom og gæld på fast ejendom. Denne udvidelse fører til en ændring i optimale aktieandele for alle investorer, men specielt for ældre investorer der har en lav human kapital.

Modellen forudsiger en negativ sammenhæng mellem gæld og aktieandel. Samtidig vil fast ejendom øge den optimale aktieandel, og investorer med høj human kapital vil også, alt andet givet, holde en højere aktieandel. Dette er dog afhængigt af korrelationerne mellem de tre aktiver og aktieindekset. En lav korrelation mellem løn/aktier og fast ejendom/aktier, samt en høj korrelation mellem gæld/aktier vil føre til en højere optimal aktieandel, da investor i disse situationer kan bruge human kapital, fast ejendom og gæld til at hedge mod risiko i sin aktiebeholdning.

Modellen vil, med noget strenge betingelser, forudsige øget aktieandel eftersom investor ældes. Blandt andet skal korrelationen mellem human kapital og finansiel kapital ikke være for lav. Undersøgelser viser at denne ligger enten på nul, eller mellem 0,3 og 0,5. Tilsvarende skal korrelationerne mellem fast ejendom/gæld på fast ejendom og finansiel kapital være lave for at optimal aktieandel skal øge med investors alder. I tillæg skal den finansielle kapital for den ældre investor ikke være for høj – ved en ekstremt høj finansiel kapital i forhold til den yngre investor, bliver værdien i fast ejendom og human kapital i forhold til finansiel kapital nemlig desto mindre, og aktieandelen vil være lavere end for en ung investor.

De to modeller modsiger dermed hinanden på nogle punkter. Blandt andet vil Cocco forudsige en negativ sammenhæng mellem fast ejendom og aktieandel, mens det modsatte er tilfælde for den udvidede model. Teoretisk set skal investorer altså øge sin aktieandel ved en

høj værdi i fast ejendom – afhængig af korrelationen – mens virkelige investorers høje værdi i fast ejendom vil føre til at den likvide formue holdes nede, og dermed også aktieandelen. I tillæg forudsiger Cocos model at investorer med en høj gæld også holder en høj aktieandel, mens den udvidede model anbefaler investorer med en høj gæld at nedbringe sin aktieandel.

6.2 Cocco vs. den udvidede Lund Larsen model

Det vil være hensigtsmæssigt at undersøge, hvilke af de to modeller der bedst egner sig til investors porteføljeanalyse, da de vil give meget forskellige resultater i visse situationer – for eksempel vil den udvidede model, alt andet givet, forudsige en højere aktieandel end Cocco for en investor med en meget høj værdi i fast ejendom. I dette afsnit bliver modellernes evne til at løse de tre puzzles sammenlignet, og derefter vil modellernes statistiske fordele og ulemper diskuteres.

Når det gælder det første puzzle – at virkelige, unge investorer ikke holder en 100% aktieandel selv om klassisk teori forudsiger dette – er det tydeligt, at Cocos model løser dette. Som det kan ses af tabel 3, skal investorer ifølge modellen kun holde en aktieandel på 0,8%, og er derfor konsistent med fund fra virkelige investorer. Hvis der sammenlignes med tabel 6, der viser at virkelige, unge investorer holder en aktieandel på 12%, kan det konkluderes med at Cocos model løser det første deltagelses puzzle. Ifølge denne model, er den fast ejendom derfor hovedårsagen til at virkelige investorer holder en lav aktieandel – modsat af klassisk teori.

Den udvidede model er ikke ligeså succesfuld i at løse det første puzzle. Som det kan ses i afsnit 5.6, løser modellen puzzleet ved en korrelation mellem lønindkomst og aktieafkast på 0,1, da investorerne i udvalget vil holde en meget negativ aktieandel (uden kortsalg vil dette give en aktieandel på nul), mens ved en korrelation på nul, vil modellen spå en meget høj aktieandel for unge investorer – dog noget lavere end den klassiske model. Modellen vil derfor for alle værdier af korrelationen give en aktieandel nærmere Cocco end hvad den klassiske gør.

Det andet puzzle bliver også løst af Cocos model. Dette puzzle går ud på at investorer i virkeligheden reducerer deres aktieandel eftersom de ældes, modsat af det klassiske investeringsråd. Som det kan ses af tabel 3, forudsiger modellen en meget lav aktieandel for

investorer under 35 år, og videre reduceres denne gradvis eftersom alderen stiger, til en aktieandel på 71,3% for investorer over 65 år. Sammenlignes det med tabel 6, vil det ses at de virkelige investorer følger modellen frem til en alder på 65, hvor de så nedbringer deres aktieandel noget.

Svaret på om den udvidede model løser puzzleet er noget lig svaret på forrige puzzle.

Modellen vil for alle korrelationer mellem løn og aktier give en aktieandel nærmere Cocco end hvad den klassiske model gør, men for en korrelation på 0, vil den ligge meget nær den klassiske model for alle værdier. Øges korrelationen til 0,1, vil aktieandelen derimod øges fra investor er 25 til han er 75. Puzzleet bliver derfor løst ved en korrelation på 0,1, men kun delvist for en korrelation på nul.

Til sidst er puzzleet om aktieandel efter finansiel nettoværdi. Virkelige investorer øger deres aktieandel eftersom deres nettoværdi øges, modsat af klassisk teori. Cocco har i sin regression for aktier over likvide aktiver en negativ koefficient for investors nettoværdi, så tilsyneladende kan det virke som om, at modellen ikke løser dette puzzle. Ser man imidlertid på tabel 2, kan man se at de velstående investorer i Cocos model vil forudsiges at have en meget højere gennemsnitlig aktieandel end de mindre velstående – 96,4%, mod 36,2%. Det kan derfor konkluderes med at Cocos model løser det sidste puzzle, og løser dermed alle de tre puzzles fra klassisk teori. Det skal imidlertid ikke glemmes at Cocco er en positiv model som forsøger at forklare hvordan investorer *virkelig* handler, ikke hvordan de *bør* handle. Den udvidede models egenskaber til at løse det sidste puzzle er tilsvarende de andre puzzles. Modellen løser kun puzzle delvist ved en korrelation mellem løn og aktier på nul, mens den ved en korrelation på 0,1, følger udviklingen til Cocos data. Dog ligger aktieandelen noget lavere end Cocos for alle investorer. Den udvidede model løser derfor kun delvist alle tre puzzles ved en korrelation på nul, mens den løser alle puzzles ved en korrelation på 0,1. Her skal det også bemærkes, at modellen er en normativ model som forudsiger hvordan investorer *bør* handle. Er modellen rigtig, vil det derfor betyde, at virkelige investorer ikke handler aktier optimalt, og kan derfor øge deres nytte ved at følge den udvidede model i stedet for Cocos.

Som tidligere nævnt, er den udvidede model ikke bygget på grundige, statistiske analyser og undersøgelser, men kun et intuitiv gæt på hvordan den klassiske model kunne se ud ved inkludering af værdi i fast ejendom, samt gæld på denne. Dette er derfor en stor ulempe i forhold til Cocos model, som bygger på meget grundigere analyser, og som derfor kan antages at være mere holdbar.

Derimod vil den udvidede model være meget bedre når det gælder at ændre variable som risiko aversion, risikopræmie på aktier, korrelationer mellem de enkelte aktiver, osv. Coccus model er nødt til at løses på nyt hver gang disse variable ændrer sig, og er derfor sværere at anvende, da nogle eller alle variable er forventet at ændre sig ofte.

Sidst, men ikke mindst, er det værd at nævne en sidste gang, at Coccus model ikke er så god til at finde de aktieandele der bør holdes af investorer – dette fordi modellen er en positiv model. Til dette egner den udvidede model sig bedre, da den er normativ.

Begge modeller vil derfor være gode til deres brug – Cocco til at forklare virkelig opførsel hos investorer, den udvidede model til at forklare hvordan investorer bør handle.

6.3 Videre arbejde

Der er mange muligheder til at gøre sammenligningen mellem de to modeller bedre. For det første vil det være en vigtig del at udarbejde en udvidet Lund Larsen model der bygger på grundige analyser og antagelser. På denne måde kan de forudsagte aktieandele være mere til at stole på, i modsætning til nu, hvor de kan være forkerte, afhængig af om antagelserne som er gjort viser sig at være rigtige eller ikke.

Den anden del af det videre arbejde vil være at ændre Coccus variable – risikopræmie, risiko på aktier, korrelationer, risiko aversion – til dagens og investors værdier. Sådan kan man virkelig undersøge om den udvidede model og Cocco giver samme resultater for en givet investor. Disse variable vil man være nødt til at ændre fra investor til investor, og selvfølgelig hver eneste gang markedets variable ændrer sig.

En simulation på hvilke modeller der ville givet det bedste resultat på historiske variable kan også gøres for at undersøge hvilken af de to modeller der bedst kan forudsige optimale aktieandele. Sandsynligvis vil Coccus model være bedst i at forklare de historiske investorers aktieandele, mens den udvidede models – forudsat at den er udviklet rigtig – aktieandele sandsynligvis vil give det højeste afkast for de individuelle investorer, da denne er normativ.

At teste de to modeller på danske, virkelige data vil også være meget vigtig for at undersøge hvilke af de to modeller der helst skal bruges til at finde optimale/virkelige aktieandele. Da Coccus data-regression og den udvidede model kun er testet på et fiktivt udvalg i denne

afhandling, vil der være meget interessant at se, hvordan de forudsagde aktieandele vil se ud for de to modeller, hvis man benytter sig af virkelige investorer i det danske marked. Det vil så være nødvendigt først at gennemgå punkt nummer 1 og 2 i dette afsnit – altså først grundig udvikle en udvidet Lund Larsen model, og så ændre Cocco's variable til variable fra dagens danske marked.

Til sidst kan det være meget interessant at se, hvordan de to modeller vil se ud dersom der inkluderes leje som et alternativ for investorerne. Dette er undersøgt i Yao og Zhang (afsnit 3.3), mens det er ignoreret i både Cocco og den udvidede Lund Larsen model. Da virkelige investorer ofte lejer sin bolig, kan det imidlertid være hensigtsmæssigt at undersøge hvordan dette påvirker de optimale og virkelige aktieandele holdt af investorer. Modellerne skal dermed udvikles på nyt.

I det hele taget vil modellerne blive bedre jo flere aktiver og forhold man tager højde for – for eksempel kan investorernes forretningsmidler også inkluderes, samt andre finansielle aktiver som ikke falder under kategorien aktier eller risikofri investeringer. Der vil være uendeligt mange forhold at tage hensyn til, og det er derfor tilnærmet umuligt at udvikle en model der vil give det korrekte svar for alle investorer. Imidlertid er man kommet et godt stykke på vej ved at inkludere investors formue i fast ejendom.

Referencer

- Campbell, J. Y. og Viceira, L. M., 2002: *Strategic asset allocation – Portfolio choice for long-term investors* – Oxford University Press.
- Cocco, J. F., 2000: *Portfolio choice in the presence of housing* – Publiceret i The review of Financial Studies, Vol. 18, No. 2, 2005.
- Engsted, Tom, 2006: *Forelæsningsnotater i Investments And Financial Markets* – Handelshøjskolen i Århus, lektion 20 og 24.
- Federal Housing Administration: <http://www.fha.gov/>
- Flavin, M. og Yamashita, T., 1998: *Owner-occupied housing and the composition of the household portfolio over the life-cycle* – Publiceret i The American Economic Review, Vol. 92, No. 1 (Marts 2002).
- Høeg, Henry, 2007: *Huset – dit livs bedste investering?* – <http://formuepleje.dk/sw25884.asp>.
- Lund Larsen, Anders, 2007: *Lønindkomstens betydning for porteføljevalget – er du en aktie eller en obligation?* – Finans/Invest, Nr. 2/07.
- The Panel Study of Income Dynamics - <http://psidonline.isr.umich.edu/>
- Tobin Separation Theorem - http://www.moneychimp.com/glossary/tobin_separation_theorem.htm
- Transition probability matrix - <http://www.eng.buffalo.edu/~kofke/ce530/Lectures/Lecture8/sld004.htm>
- Wallmeier, M. og Zainhofer, D., 2006: *How to invest over the life-cycle: A review* – Tilgængelig på SSRN: <http://ssrn.com/abstract=951167>
- Wooldridge, Jeffrey M., 2006: *Introductory Econometrics – A Modern Approach* – Thomson South-Western.

- Yao, R. og Zhang, H. H., 2004: *Optimal consumption and portfolio choices with risky housing and borrowing constraints* – The Review of Financial Studies, Vol. 18, No. 1, 2005.